A 75-a Olimpiadă Națională de Matematică

Etapa zonală, 15 februarie 2025

Clasa a XII-a

Soluții și bareme

Problema 1. Se consideră mulțimea $M = (-\infty, 1)$. Pentru fiecare pereche $(x, y) \in M \times M$ notăm

$$x * y = \frac{2024 - xy}{2025 - x - y}.$$

a) Arătați că funcția $(x, y) \to x * y$ definește o lege de compoziție pe M.

b) Demonstrați că legea de compoziție " $*$ " este comutativă, asociativă, dar nu are element neutru.

Supliment GM 9/2024

Soluție

a) Arătăm că dacă $x, y \in M$, atunci $x * y \in M$. Din $x, y \in M \Rightarrow x < 1, y < 1 \Rightarrow 2025 - x - y > 0$. $x * y \in M \Leftrightarrow \frac{2024-xy}{2025-x-y} < 1$ înmulțind această relație cu $(2025 - x - y) > 0$ obținem $2024 - xy < 2025 - x - y \Leftrightarrow x + y - xy - 1 < 0 \Leftrightarrow (x - 1)(1 - y) < 0$ ceea ce este adevărat pentru că $x - 1 < 0$ și $1 - y > 0$ **2p**

b) $x * y = \frac{2024-xy}{2025-x-y} = \frac{2024-yx}{2025-y-x} = y * x, \forall x, y \in M$ deci legea " $*$ " este comutativă. **1p**
Verificăm asociativitatea legii de compoziție, pentru care arătăm că $(x * y) * z = x * (y * z)$ pentru orice $x, y, z \in M$. **1p**
$(x * y) * z = \frac{2024-xy}{2025-x-y} * z = \frac{2024-\frac{2024-xy}{2025-x-y}\cdot z}{2025-\frac{2024-xy}{2025-x-y}-z} = = \frac{2024\cdot 2025-2024(x+y+z)+xyz}{2025^2-2024-2025(x+y+z)+(xy+xz+yz)} \overset{not.}{=} f(x, y, z)$ ... **1p**
Se observă că f este simetrică deci $f(y, z, x) = f(x, y, z)$ pentru orice $x, y, z \in M$. $x * (y * z) \overset{com.}{=} (y * z) * x \overset{def.}{=} f(y, z, x) \overset{sim.}{=} f(x, y, z) = (x * y) * z, \forall x, y, z \in M$ deci legea este asociativă. **1p**
Dacă legea ar avea element neutru, atunci ar exista $e \in M$ astfel încât $e * x = x$ pentru orice $x \in M$, adică $\frac{2024-ex}{2025-e-x} = x$ pentru orice $x \in M$, deci $2024 - ex = 2025x - ex - x^2, \forall x \in M \Leftrightarrow x^2 - 2025x + 2024 = 0, \forall x \in M$ ceea ce nu este adevărat, pentru că $x^2 - 2025x + 2024 = 0$ numai pentru $x = 2024$ și $x = 1$. Deci operația nu are element neutru. **1p**

Problema 2. Să se calculeze următoarele integrale nedefinite:

a)
$$\int \frac{2x^2+3e^x-1}{x^2+e^x-x}dx, \quad x \in \mathbb{R};$$

b)
$$\int \frac{\sin x}{27\sin x + 36\cos x}dx, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Soluție

a) Notăm $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = x^2 + e^x - x$. Demonstrăm prima dată că $e^x - x > 0$ pentru oricare $x \in \mathbb{R}$, așadar deducem că $u(x) > 0$ pentru oricare $x \in R$. **1p**
$\int \frac{2x^2+3e^x-1}{x^2+e^x-x}dx = \int \frac{2u(x)+u'(x)}{u(x)}dx = 2x + \ln(u(x)) = 2x + \ln|x^2+e^x-x| + \mathcal{C} = 2x + \ln(x^2+e^x-x) + \mathcal{C}$. **2p**

b) Fie:$I = \int \frac{\sin x}{27\sin x+36\cos x}dx, \quad J = \int \frac{\cos x}{27\sin x+36\cos x}dx$ **1p**
$27I + 36J = \int \frac{27\sin x+36\cos x}{27\sin x+36\cos x}dx = \int dx = x + \mathcal{C}$ **1p**
$27J - 36I = \int \frac{27\cos x-36\sin x}{27\sin x+36\cos x}dx = \ln|27\sin x + 36\cos x| + \mathcal{C} = \ln(27\sin x + 36\cos x) + \mathcal{C}$ **1p**
de unde $I = \frac{27x-36\ln(27\sin x+36\cos x)}{2025} + \mathcal{C}$ **1p**

Problema 3. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit și $g \in G$ astfel încât $ord(g) = 6$. Să se arate că există și sunt unice $a, b \in G$ astfel încât $ord(a) = 2$, $ord(b) = 3$ și $a \cdot b = b \cdot a = g$.(Cu $ord(x)$ am notat ordinul elementului x.)

Soluție Din $ord(g) = 6 \Rightarrow g^6 = e$ și $g^k \neq e, \forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Fie $a = g^3$ și $b = g^4$, atunci $a^2 = (g^3)^2 = g^6 = e$ și $b^3 = (g^4)^3 = g^12 = e$. **2p**
Din $a^2 = e$ rezultă că $ord(a)|2$, și cum $a = g^3 \neq e$ rezultă că $ord(a) = 2$. Analog din $b^3 = e$ rezultă că $ord(b)|3$, și cum $b = g^2 \neq e$ rezultă că $ord(b) = 3$, deci am arătat existența. **2p**
În continuare demonstrăm unicitatea lui a și b.

Presupunem că ar exista $a_1, b_1 \in G$ astfel încât $g = a_1b_1 = b_1a_1$ și $ord(a_1) = 2$, $ord(b_1) = 3$. **1p**
Atunci $g^3 = (a_1b_1)^3 = a_1b_1a_1b_1a_1b_1 = a_1a_1a_1b_1b_1b_1 = a_1a_1^2b_1^3 = a_1ee = a_1$. Pe de altă parte $g^3 = a$ deci $a = a_1$. Analog se arată că $b = b_1$. **2p**

Problema 4. Fie $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$. Să se determine funcția f, știind că satisface următoarele condiții:

(1) $2x^3F(x)+x^2f(x)=e^{x^2}\cdot\left(4x^2-1\right), \forall x\in(0,+\infty)$;

(2) $f(1)=e-\frac{2}{e}$.

Soluție Înmulțind relația (1) cu $\frac{e^{x^2}}{x^2}$ obținem $2x\cdot e^{x^2}F(x)+e^{x^2}f(x)=-\frac{1}{x^2}e^{2x^2}+4e^{2x^2}$, $\forall x\in(0,+\infty)$ adică $\left(e^{x^2}F(x)\right)'=\left(\frac{1}{x}e^{2x^2}\right)'$, $\forall x\in(0,+\infty)$ **3p**
de unde rezultă că $e^{x^2}F(x)=\frac{1}{x}e^{2x^2}+c$, $\forall x\in(0,+\infty)$ adică $F(x)=\frac{1}{x}\cdot e^{x^2}+c\cdot e^{-x^2}$, $x\in(0,+\infty)$ ... **1p**
F fiind primitivă a lui f rezultă că $f(x)=F'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{x^2}+2\cdot e^{x^2}-2cxe^{-x^2}$, $x\in(0,+\infty)$ **1p**
Din $f(1)=e-\frac{2}{e}$ rezultă că $-e+2e-\frac{2c}{e}=e-\frac{2}{e}$ adică $c=1$. **1p**
Deci funcția căutată este: $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $\quad f(x)=e^{x^2}\cdot\left(2-\frac{1}{x^2}\right)-e^{-x^2}\cdot 2x$. **1p**