A 75-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 15 februarie 2025
Clasa a XI-a
Soluții și bareme

Problema 1.

Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ și $x_{n+3} = x_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

GM 9/S:24.224.

Soluție

Varianta I.

Observăm că șirul are o periodicitate: $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ...$ **1p**

Dacă $n = 3k$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{3k}}{3k} =$

$= \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(1+2+3) + (1+2+3) + \cdots + (1+2+3)}{3k} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k\cdot 6}{3k} = 2$ **2p**

Dacă $n = 3k+1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{6k + x_{3k+1}}{3k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{6k+1}{3k+1} = 2$ **2p**

Dacă $n = 3k+2$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{6k + x_{3k+1} + x_{3k+2}}{3k+2} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{6k+1+2}{3k+2} = 2$ **2p**

Varianta II.

$$x_n = \begin{cases} 3, & n = 3k \\ 1, & n = 3k+1 \\ 2, & n = 3k+2 \end{cases} \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = \left[\frac{n}{3}\right]\cdot 3 + \left[\frac{n+2}{3}\right]\cdot 1 + \left[\frac{n+1}{3}\right]\cdot 2 \leq \left[\frac{n+2}{3}\right]\cdot 6 \leq \frac{n+2}{3}\cdot 6$$

și $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \left[\frac{n}{3}\right]\cdot 3 + \left[\frac{n+2}{3}\right]\cdot 1 + \left[\frac{n+1}{3}\right]\cdot 2 \geq \left[\frac{n}{3}\right]\cdot 6 \geq \left(\frac{n}{3} - 1\right)\cdot 6 = 2n - 6$ **4p**

$$\Rightarrow \quad \frac{2n-6}{n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq \frac{2n+4}{n}$$

și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-6}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+4}{n} = 2 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = 2$ **3p**

Problema 2.

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. Fie șirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ astfel încât $C^n = a_n A + b_n B, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2a_n + 2b_n} = 10$.

Mátyás Mátyás, Sfântu Gheorghe

Soluție

Varianta I.

$C = a_1 A + b_1 B \Rightarrow a_1 = \frac{3}{2}, b_1 = \frac{5}{2}$ **2p**

Din $C^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}B$ și $C^{n+1} = C^n \cdot C$ rezultă că:

$a_{n+1} = 6a_n, b_{n+1} = 10b_n \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{3}{2} \cdot 6^{n-1}, b_n = \frac{5}{2} \cdot 10^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **2p**

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2a_n + 2b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{6^n + 10^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = 10$ **3p**

Varianta II.
Se poate calcula: $C^n = \dfrac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 10^n + 6^n & 10^n - 6^n \\ 3 \cdot 10^n - 3 \cdot 6^n & 10^n + 3 \cdot 6^n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{10^n}{4}, a_n = \frac{6^n}{4}$ **4p**

În final: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2a_n + 2b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{6^n + 10^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = 10$ **3p**

Problema 3.

Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{2025}{x_n^2}\right)$, $x_0 \geq 0$.

Demonstrați că $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent și calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Dáni Zsuzsa, Târgu Secuiesc

Soluție $x_0 \neq 0$ din recurență, deci $x_0 > 0$ și din din recurență reiese că pentru $x_n > 0$ avem $x_{n+1} > 0$, deci putem aplica inegalitatea mediilor. $x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(x_n + x_n + \frac{2025}{x_n^2}\right) \geq \sqrt[3]{x_n \cdot x_n \cdot \frac{2025}{x_n^2}} = \sqrt[3]{2025}$. **2p**

$\Rightarrow x_{n+1} - x_n = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{2025}{x_n^2}\right) - x_n = \frac{2025 - x_n^3}{3 \cdot x_n^2} \leq 0$, deci x_n este descrescător, începând cu x_1. .... **2p**

Șirul este monoton descrescător și mărginit inferior, deci convergent. Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. **1p**

Prin trecere la limită avem $l = \frac{1}{3}\left(2l + \frac{2025}{l^2}\right) \quad \Rightarrow \quad l = \sqrt[3]{2025}$ **2p**

Problema 4.

Fie M mulțimea matricelor de forma $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{pmatrix}$, cu $a_n = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}{2}$

(în numărător sunt n radicali), iar $b_n = \sqrt{1 - a_n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a. Determinați A_1^{2025}.

b. Verificați că $a_n = 2a_{n+1}^2 - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c. Arătați că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A_{2025}^k = I_2$.

Dáni Zsuzsa, Târgu Secuiesc

Soluție

a. $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$A_1^{2025} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2025\pi}{4} & \sin\frac{2025\pi}{4} \\ -\sin\frac{2025\pi}{4} & \cos\frac{2025\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ **2p**

b. Verificare imediată. **2p**

c. $\overset{b.}{\Rightarrow} a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n+1}{2}} \quad \Rightarrow \quad a_2 = \sqrt{\frac{\cos\frac{\pi}{4}+1}{2}} = \cos\frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \cos\frac{\pi}{8} \quad \Rightarrow \quad a_n = \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \quad \Rightarrow$

$A_{2025} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2^{2026}} & \sin\frac{\pi}{2^{2026}} \\ -\sin\frac{\pi}{2^{2026}} & \cos\frac{\pi}{2^{2026}} \end{pmatrix} \Rightarrow k = 2^{2027}$ este un exponent adecvat astfel încât $A_{2025}^k = I_2$.

.... **3p**