A 75-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 15 februarie 2025

Clasa a X-a

Soluții și bareme

Problema 1. Arătați că funcția $f\colon [4,+\infty) \to [2,+\infty), f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x^2-16}}$ este bijectivă și determinați funcția inversă a lui f.

*****

Soluție

Dacă $x_1, x_2 \in [4,+\infty)$ avem: $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow x_1^2 - 16 < x_2^2 - 16 \Rightarrow \sqrt{x_1^2-16} < \sqrt{x_2^2-16} \Rightarrow x_1 + \sqrt{x_1^2-16} < x_2 + \sqrt{x_2^2-16} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[4,+\infty) \Rightarrow f$ este injectivă.

.... **2p**

Fie $y \in [2,+\infty)$. Din $f(x) = y$ rezultă: $x + \sqrt{x^2-16} = y^2 \Rightarrow \sqrt{x^2-16} = y^2 - x \Rightarrow x^2 - 16 = y^4 - 2y^2x + x^2 \Rightarrow 2y^2x = y^4 + 16 \Rightarrow x = \dfrac{y^4+16}{2y^2}$

.... **2p**

$\dfrac{y^4+16}{2y^2} \geq 4 \Leftrightarrow y^4 - 8y^2 + 16 \geq 0 \Leftrightarrow (y^2-4)^2 \geq 0 \Rightarrow x = \dfrac{y^4+16}{2y^2} \in [4,+\infty) \Rightarrow f$ este surjectivă.

.... **1p**

f este injectivă și surjectivă $\Rightarrow f$ este bijectivă. **1p**

Inversa lui f este $f^{-1}\colon [2,+\infty) \to [4,+\infty), f(x) = \dfrac{x^4+16}{2x^2}$. **1p**

Problema 2. Demonstrați că, pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$ și $n \in \mathbb{N}^*$, are loc inegalitatea următoare:

$$n \cdot |1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| + \ldots + |1+z^{2n+1}| \geq 2n$$

prelucrare după GM 10/S:L24.257

Soluție

$|1+z^{2k}| + |1+z^{2k+1}| = |-1-z^{2k}| + |1+z^{2k+1}| \geq |-1-z^{2k}+1+z^{2k+1}| = |-z^{2k}+z^{2k+1}| = |z|^{2k} \cdot |-1+z| = |-1+z|, \forall k \in \{1,2,\ldots,n\}$.

.... **3p**

$n \cdot |1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| + \ldots + |1+z^{2n+1}| \geq n \cdot |1+z| + n \cdot |-1+z| \geq n \cdot (|1+z| + |-1+z|)$

.... **2p**

$n \cdot (|1+z| + |-1+z|) \geq n \cdot |1+z-1+z| = n \cdot |2z| = 2n \cdot |z| = 2n$ **2p**

Problema 3. Arătați că $(\log_{45} S + 1) \cdot (\log_{44} S - 1) = -1$, unde:

$$S = \sum_{k=1}^{2024} \frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}}$$

*****

Soluție

Amplificăm fracția $\dfrac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}$ cu conjugata numitorului:

$$\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}} = \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2k-k^2(k+1)} = \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k^3+2k^2+k-k^3-k^2} = \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k^2+k} =$$

$$\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)}=\frac{(k+1)\sqrt{k}}{k(k+1)}-\frac{k\sqrt{k+1}}{k(k+1)}=\frac{\sqrt{k}}{k}-\frac{\sqrt{k+1}}{k+1}$$

.... **3p**

$$\sum_{k=1}^{2024}\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}=\frac{\sqrt{1}}{1}-\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\cancel{\frac{\sqrt{3}}{3}}+\ldots+\cancel{\frac{\sqrt{2024}}{2024}}-\frac{\sqrt{2025}}{2025}=1-\frac{45}{2025}=1-\frac{1}{45}=\frac{44}{45}$$

.... **2p**

$(\log_{45}S+1)\cdot(\log_{44}S-1)=(\log_{45}44-\log_{45}45+1)\cdot(\log_{44}44-\log_{44}45-1)=\log_{45}44\cdot(-\log_{44}45)=-1$

.... **2p**

Problema 4. Demonstrați că are loc următoarea inegalitate:

$$4<\log_3 5+\log_5 11+\log_{11} 27<\frac{9}{2}$$

*****

Soluție

Din inegalitatea mediilor: $3\sqrt[3]{\log_3 5\cdot\log_5 11\cdot\log_{11}27}\le\log_3 5+\log_5 11+\log_{11}27$ **1p**

$3\sqrt[3]{\log_3 5\cdot\log_5 11\cdot\log_{11}27}=3\sqrt[3]{\log_3 5\cdot\log_5 27}=3\sqrt[3]{\log_3 27}=3\sqrt[3]{3}$ **1p**

$4=\sqrt[3]{64}<\sqrt[3]{81}=3\sqrt[3]{3}\Rightarrow 4<\log_3 5+\log_5 11+\log_{11}27$ **1p**

$\log_3 25<\log_3 27\Rightarrow 2\log_3 5<3\Rightarrow\log_3 5<\dfrac{3}{2}$ **1p**

$\log_5 121<\log_5 125\Rightarrow 2\log_5 11<3\Rightarrow\log_5 11<\dfrac{3}{2}$ **1p**

$\log_{11}729<\log_{11}1331\Rightarrow\log_{11}27^2<\log_{11}11^3\Rightarrow 2\log_{11}27<3\Rightarrow\log_{11}27<\dfrac{3}{2}$.................... **1p**

$\log_3 5+\log_5 11+\log_{11}27<3\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2}$ **1p**