A 75-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 15 februarie 2025

Clasa a IX-a
Soluții și bareme

Problema 1. Demonstrați că

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n},$$

pentru oricare $n>1$, $n\in\mathbb{N}$. *(***)*

Soluție Aplicăm metoda inducției matematice.

Pentru $n=2$ avem

$$1-\frac{1}{4}=\frac{4-1}{4}=\frac{3}{4}=\frac{2+1}{2\cdot 2},$$

deci este adevărat.

Pentru $n=3$ avem

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{4-1}{4}\cdot\frac{9-1}{9}=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}=\frac{24}{36}=\frac{4}{6}=\frac{3+1}{2\cdot 3},$$

deci este adevărat. **2p**

Fie $n\geq 4$, deci acceptăm ca fiind adevărată afirmația

$$P_n:\underbrace{\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}_{a_n}=\frac{n+1}{2n}.$$

Demonstrăm din $P_n: a_n=\dfrac{n+1}{2n}$ afirmația $P_{n+1}: a_{n+1}=\dfrac{n+1+1}{2(n+1)}$. **1p**

$$\begin{aligned}
a_{n+1}&=\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\
&=a_n\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\
&=a_n\cdot\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\\
&=a_n\cdot\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\\
&=\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\\
&=\frac{n+2}{2(n+1)}\\
&=\frac{n+1+1}{2(n+1)}.
\end{aligned}$$

.... **3p**

Așadar, în baza principiului inducției matematice, afirmația este adevărată pentru oricare $n > 1, n \in \mathbb{N}$.
. . . . **1p**

Problema 2. Fie a, b, c numere reale strict pozitive .

a) Demonstrați că

$$a^2b^2 + b^2c^2 \geq 2ab^2c$$
$$a^2b^2 + a^2c^2 \geq 2a^2bc$$
$$a^2c^2 + b^2c^2 \geq 2abc^2 \ .$$

b) Dacă a, b, c au proprietatea că $a + b + c = 1$ și $ab + bc + ca = \sqrt{3abc}$, determinați numerele.

pe baza S:L24.241, Gazeta matematicii.

Soluție

a) Deoarece numerele a^2b^2, b^2c^2, a^2c^2 sunt strict pozitive, putem scrie inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică:

$$\frac{a^2b^2 + b^2c^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^4c^2}$$
$$\frac{a^2b^2 + b^2c^2}{2} \geq ab^2c$$
$$a^2b^2 + b^2c^2 \geq 2ab^2c$$

. . . . **1p**

$$\frac{a^2b^2 + a^2c^2}{2} \geq \sqrt{a^4b^2c^2}$$
$$\frac{a^2b^2 + a^2c^2}{2} \geq a^2bc$$
$$a^2b^2 + a^2c^2 \geq 2a^2bc$$

. . . . **1p**

$$\frac{a^2c^2 + b^2c^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2c^4}$$
$$\frac{a^2c^2 + b^2c^2}{2} \geq abc^2$$
$$a^2c^2 + b^2c^2 \geq 2abc^2$$

. . . . **1p**

b) Adunând relațiile din subpunctul (a.), obținem că

$$\begin{aligned} 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 &\geq 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2 \\ 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 &\geq 2abc(a+b+c) \\ 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 &\geq 2abc \end{aligned}$$

.... **1p**

Deci

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc\,. \tag{1}$$

Avem că $a, b, c > 0$ și $a + b + c = 1$.

$$\begin{aligned} ab + bc + ca &= \sqrt{3abc} \quad \mid (\ )^2 \\ a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2ab^2c + 2abc^2 + 2a^2bc &= 3abc \\ a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c) &= 3abc \\ a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc &= 3abc\,. \end{aligned}$$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = abc\,. \tag{2}$$

.... **1p**

Din (2) și (1) rezultă că în toate cele trei inegalități există egalitate, ceea ce se întâmplă doar dacă $a^2b^2 = b^2c^2 = a^2c^2$. Știind că numerele a, b, c sunt strict pozitive, asta înseamnă că $a = b = c$. . **1p**

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1 \\ a &= b = c \\ \Longrightarrow a = b = c &= \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab + bc + ac &= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \\ ab + bc + ac &= \frac{1}{3} \\ ab + bc + ac &= \sqrt{\frac{1}{9}} \\ ab + bc + ac &= \sqrt{\frac{3}{27}} \\ ab + bc + ac &= \sqrt{3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}} \\ ab + bc + ac &= \sqrt{3abc}\,. \end{aligned}$$

Deci $a = b = c = \dfrac{1}{3}$ este soluția corectă. **1p**

Problema 3.

a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-2024|=2025(x-2025)\,.$$

b) Dacă x este soluția ecuației

$$|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-n|=(n+1)(x-n-1)\,,$$

atunci demonstrați, că $x \geq \dfrac{5n+1}{2}$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.

(***)

Soluție

a) Putem observa că

$$\begin{aligned}
|x-1| &\geq 0\\
|x-2| &\geq 0\\
&\ldots\\
|x-2024| &\geq 0\\
\Longrightarrow |x-1|+|x-2|+\cdots+|x-2024| &\geq 0\\
\Longrightarrow 2025(x-2025) &\geq 0\\
\Longrightarrow x &\geq 2025\\
\Longrightarrow |x-1| &= x-1\\
|x-2| &= x-2\\
&\ldots\\
|x-2024| &= x-2024\,.
\end{aligned}$$

. . . . **1p**

Deci ecuația poate fi transformată în modul următor:

$$\begin{aligned}
|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-2024| &= 2025(x-2025)\\
x-1+x-2+\cdots+x-2024 &= 2025(x-2025)\\
2024x-\frac{2024\cdot 2025}{2} &= 2025x-2025^2
\end{aligned}$$

. . . . **1p**

$$\begin{aligned}
2024x-\frac{2024\cdot 2025}{2} &= 2025x-2025^2\\
2025^2-1012\cdot 2025 &= 2025x-2024x\\
2025\cdot(2025-1012) &= x\\
2025\cdot 1013 &= x\,.
\end{aligned}$$

. . . . **1p**

b) Similar subpunctului (a), și aici putem scrie următoarele:

$$\begin{aligned} |x-1|+|x-2|+\cdots+|x-n| &\geq 0 \\ \implies (n+1)(x-n-1) &\geq 0 \\ \implies x &\geq n+1 \\ \implies x-1+x-2+\cdots+x-n &= (n+1)(x-n-1)\,. \end{aligned}$$

. . . . **1p**

$$\begin{aligned} x-1+x-2+\cdots+x-n &= (n+1)(x-n-1) \\ n\cdot x-\frac{n\cdot(n+1)}{2} &= (n+1)\cdot x-(n+1)^2 \\ (n+1)^2-\frac{n\cdot(n+1)}{2} &= (n+1)\cdot x-n\cdot x \\ (n+1)^2-\frac{n\cdot(n+1)}{2} &= x\,. \end{aligned}$$

. . . . **1p**

$$\begin{aligned} (n+1)^2-\frac{n\cdot(n+1)}{2} &= x \\ \frac{2n^2+4n+2-n^2-n}{2} &= x \\ \frac{n^2+3n+2}{2} &= x \end{aligned}$$

. . . . **1p**

Se arată că $x \geq \dfrac{5n+1}{2}$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} x &\geq \frac{5n+1}{2} \\ \frac{n^2+3n+2}{2} &\geq \frac{5n+1}{2} \quad \Big|\cdot 2 \\ n^2+3n+2 &\geq 5n+1 \\ n^2+3n-5n+2-1 &\geq 0 \\ n^2-2n+1 &\geq 0 \\ (n-1)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ceea ce este adevărat pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$ **1p**

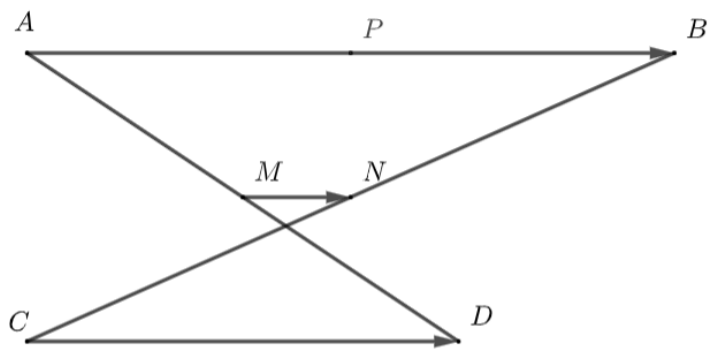
Problema 4. Fie vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ cu $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$, $k > 1, k \in \mathbb{R}$, cu A, B, C, D puncte necoliniare, iar M mijlocul lui $[AD]$, N mijlocul lui $[CB]$ și P mijlocul lui $[AB]$.

a) Arătați că $\overrightarrow{MN} = \dfrac{k-1}{2} \cdot \overrightarrow{CD}$;

b) Determinați vectorii $\overrightarrow{AQ}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ astfel încât punctele M, N, P și Q să fie vârfurile unui paralelogram (nu neapărat în această ordine)!

(***)

Soluție

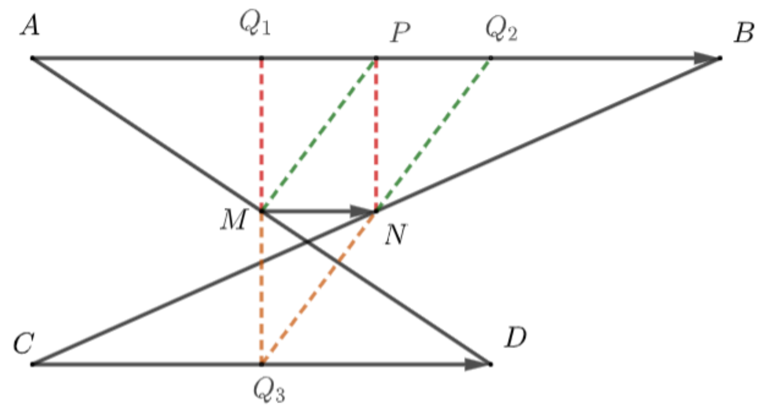


a)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \\
&= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{AM} \\
&= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\
&= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) \\
&= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \\
&= \frac{1}{2} \cdot k \cdot \overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \\
&= \frac{k}{2}\overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \\
&= \frac{k-1}{2}\overrightarrow{CD}\,.
\end{aligned}$$

. . . . **2p**

b) Avem trei cazuri: $MNPQ$ este paralelogram, $MNQP$ este paralelogram și $MQNP$ este paralelogram. **1p**



Din subpunctul (a) știm, că

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \frac{k-1}{2}\overrightarrow{CD} \\ &= \frac{k-1}{2}\cdot\frac{1}{k}\cdot\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{k-1}{2k}\overrightarrow{AB}\,,\end{aligned}$$

deci rezultă că $MN||AB$, dar și că $MN||CD$.

Cazul I.: $MNPQ$ este paralelogram $\Longleftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, dar și $MN||AB,\ P \in [AB]$ deci $Q \in [AP]$.

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MN} = \frac{k-1}{2k}\overrightarrow{AB}\,.$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} \\ &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{MN} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{k-1}{2k}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{k-k+1}{2k}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2k}\overrightarrow{AB}\,.\end{aligned}$$

.... **1p**

Cazul II.: $MNQP$ este paralelogram $\iff \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$, dar și $MN||AB,\ P \in [AB]$ deci $Q \in [PB]$.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MN} = \frac{k-1}{2k}\overrightarrow{AB}\,.$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} \\
&= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{MN} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{k-1}{2k}\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{k+k-1}{2k}\overrightarrow{AB} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2k}\right)\overrightarrow{AB}\,.
\end{aligned}$$

.... **1p**

Cazul III. $MQNP$ este paralelogram $\iff \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{PN}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PN} &= \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BN} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
\Longrightarrow \overrightarrow{MQ} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\,.
\end{aligned}$$

.... **1p**

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MQ} \\
&= \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
&= \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \\
&= \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}\cdot\overrightarrow{CD} \\
&= \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2k}\overrightarrow{AB}\,.
\end{aligned}$$

.... **1p**

Soluție 2.

a) Cu vectori de poziție avem:

$$\vec{r}_B - \vec{r}_A = k(\vec{r}_D - \vec{r}_C)$$
$$\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_D}{2}$$
$$\vec{r}_N = \frac{\vec{r}_B + \vec{r}_C}{2}$$

.... **1p**

$$\overrightarrow{MN} = \vec{r}_N - \vec{r}_M = \frac{\vec{r}_B + \vec{r}_C - \vec{r}_A - \vec{r}_D}{2} = \frac{k(\vec{r}_D - \vec{r}_C) + \vec{r}_C - \vec{r}_D}{2} = \frac{(k-1)(\vec{r}_D - \vec{r}_C)}{2} =$$
$$= \frac{(k-1)(\overrightarrow{CD})}{2}$$

.... **1p**

b) Știm că pentru A, B, C, D necoliniare $ABCD$ este paralelogram dacă și numai dacă $\vec{r}_A + \vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{r}_D$. **1p**

$$\vec{r}_P = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B}{2}$$

Avem trei cazuri: **1p**

$$\vec{r}_M + \vec{r}_N = \vec{r}_P + \vec{r}_Q \Leftrightarrow \vec{r}_Q = \vec{r}_M + \vec{r}_N - \vec{r}_P = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_D + \vec{r}_B + \vec{r}_C - \vec{r}_A - \vec{r}_B}{2}$$
$$\Leftrightarrow \vec{r}_Q = \frac{\vec{r}_D + \vec{r}_C}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AQ} = \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}}{2} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}}{2} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2k}\overrightarrow{AB}$$

.... **1p**

$$\vec{r}_M + \vec{r}_P = \vec{r}_N + \vec{r}_Q \Leftrightarrow \vec{r}_Q = \vec{r}_M + \vec{r}_P - \vec{r}_N = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_D + \vec{r}_A + \vec{r}_B - \vec{r}_B - \vec{r}_C}{2}$$
$$\Leftrightarrow \vec{r}_Q = \vec{r}_A + \frac{\overrightarrow{CD}}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2k}\overrightarrow{AB}$$

.... **1p**

$$\vec{r}_M + \vec{r}_Q = \vec{r}_P + \vec{r}_N \Leftrightarrow \vec{r}_Q = \vec{r}_P + \vec{r}_N - \vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_B + \vec{r}_C - \vec{r}_A - \vec{r}_D}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{r}_Q = \overrightarrow{r}_B - \frac{\overrightarrow{CD}}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2k}\overrightarrow{AB} = \frac{2k-1}{2k}\overrightarrow{AB}$$

. . . . **1p**