MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN COVASNA KOVÁSZNA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN HARGHITA HARGITA MEGYE TANFELÜGYELŐSÉGE

A 75-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 15 februarie 2025

Clasa a VIII-a

Soluții și bareme

Problema 1. Determinați numerele reale a și b care verifică egalitatea

$$3a+3b+28=8\sqrt{3a+5}+6\sqrt{3b-2}$$

și calculați $(a-b-1)^{2024}$.

Soluție

$3a+5-2\cdot 4\sqrt{3a+5}+16+3b-2-2\cdot 3\sqrt{3b-2}+9=0$ **2p**

$(\sqrt{3a+5}-4)^2+(\sqrt{3b-2}-3)^2=0$ **1p**

$(\sqrt{3a+5}-4)^2+(\sqrt{3b-2}-3)^2=0$, $(\sqrt{3a+5}-4)^2\geq 0$, $(\sqrt{3b-2}-3)^2\geq 0 \Rightarrow (\sqrt{3a+5}-4)^2=0$ și $(\sqrt{3b-2}-3)^2=0$ **1p**

$(\sqrt{3a+5}-4)^2=0\Rightarrow \sqrt{3a+5}-4=0\Rightarrow \sqrt{3a+5}=4\Rightarrow 3a+5=16\Rightarrow a=\frac{11}{3}$ **1p**

$(\sqrt{3b-2}-3)^2=0\Rightarrow \sqrt{3b-2}-3=0\Rightarrow \sqrt{3b-2}=3\Rightarrow 3b-2=9\Rightarrow b=\frac{11}{3}$ **1p**

$(a-b-1)^{2024}=(\frac{11}{3}-\frac{11}{3}-1)^{2024}=(-1)^{2024}=1$ **1p**

Gazeta Matematică

Problema 2. Se consideră numerele

$$a=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{2023}+\sqrt{2024}}$$

și

$$b=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+...+\frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}$$

.

a) Calculați media aritmetică a numerelor a și b!
b) Demonstrați că $a>22$.

Soluție

a) Raționalizarea lui a **1p**

Raționalizarea lui b **1p**

După raționalizare se obține:

$$a+b=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{4}+...+\sqrt{2024}-\sqrt{2023}+\sqrt{2025}-\sqrt{2024}=$$
$=-1+45=44$ **2p**

$m_a = \frac{a+b}{2} = 22$ **1p**

b) Deoarece $\frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \Rightarrow a > b$ **1p**

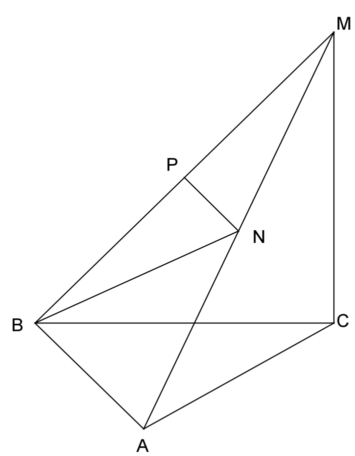
Adunăm a la ambii membrii ai inecuației și obținem: $2a > a + b$, de unde se obține $2a > 44$, deci $a > 22$ **1p**

Balog Katalin, Târgu Secuiesc

Problema 3. Fie triunghiul ABC, unde $AB = 1$ cm, $AC = \sqrt{2}$ cm și $BC = \sqrt{3}$ cm. Pe planul triunghiului ABC din punctul C se ridică perpendiculara CM, $CM = \sqrt{3}$ cm.

a) Demonstrați că triunghiul ABC este dreptunghic!
b) Demonstrați că BA este perpendicular pe planul (ACM) și calculați tangenta unghiului format de dreapta BM cu planul (ACM)!
c) Fie $N \in AM$ astfel încât $MN = NB$. Calculați aria triunghiului MNB!

Soluție



a) $(\sqrt{3})^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 \Rightarrow 3 = 1 + 2 \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$
Din reciproca teoremei lui Pitagora, rezultă că trunghiul ABC este dreptunghic, $\sphericalangle A = 90°$ **1p**

b) $MC \perp (ABC)$, $AB \subset (ABC) \Rightarrow MC \perp AB$
$AB \perp MC$, $AB \perp AC$, $MC \cap AC = \{C\}$; MC, $AC \subset (ACM) \Rightarrow AB \perp (ACM)$ **1p**

$M \in (ACM)$, $BA \perp (ACM) \Rightarrow pr_{(ACM)}BM = AM \Rightarrow tg[\sphericalangle(BM,(ACM))] = tg[\sphericalangle(BM, AM)] =$
$= tg(\sphericalangle BMA)$ **1p**

$AB \perp (ACM)$, $AM \subset (ACM) \Rightarrow AB \perp AM$

În triunghiul dreptunghic ACM, $AM = \sqrt{5}$ cm.

$tg(\sphericalangle BMA) = \frac{AB}{AM} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ **1p**

c) Fie P mijlocul laturii MB. Deoarece $MN = NB$, rezultă că punctul N aparține medianei segmentului MB, deci $NP \perp MB$. **1p**

În triunghiul dreptunghic BCM, $BM = \sqrt{6}$ cm.
Triunghiurile MPN și MAB sunt asemenea, deci

$\frac{MP}{MA} = \frac{PN}{AB} \Rightarrow PN = \frac{\sqrt{30}}{10}$ cm **1p**

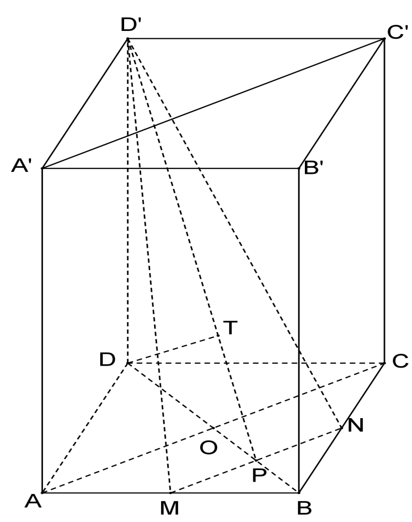
$A_{MPB} = \frac{BM \cdot NP}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$ cm^2 .... **1p**

Angi Tibor, Ditrău

Problema 4. Prisma dreaptă regulată $ABCDA'B'C'D'$ are baza $ABCD$ pătrat, muchia bazei $AB = 4\sqrt{2}$ cm și muchia laterală $AA' = 6\sqrt{3}$ cm. Fie M și N mijloacele laturilor AB și BC, $AC \cap DB = \{O\}$.

a) Arătați că $A'C' \parallel (D'MN)$!
b) Calculați unghiul format de planurile $(D'MN)$ și (ABC)!
c) Calculați distanța de la punctul D la planul $(D'MN)$!

Soluție



a) MN linie mijlocie în triunghiul $ABC \Rightarrow MN \parallel AC$ (1)
$ACC'A'$ paralelogram $\Rightarrow A'C' \parallel AC$ (2) **1p**

(1), (2) $\Rightarrow A'C' \parallel MN$
$A'C' \parallel MN$, $MN \subset (D'MN) \Rightarrow A'C' \parallel (D'MN)$ **1p**

b) Fie $DB \cap MN = \{P\}$
$DB \perp AC$, $MN \parallel AC \Rightarrow DB \perp MN$
$DD' \perp (ABCD)$, $DP \perp MN$, DP, $MN \subset (ABCD) \Rightarrow D'P \perp MN$ **1p**

$(D'MN) \cap (ABC) = MN$, $D'P \perp MN$, $D'P \subset (D'MN)$, $DP \perp MN, DP \subset (ABC) \Rightarrow [\sphericalangle(D'MN),$ $(ABC)] = \sphericalangle D'PD$ **1p**

În triunghiul dreptunghic $D'DP$, $DP = 6$ cm, $D'P = 12$ cm $\Rightarrow \sphericalangle DD'P = 30^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \sphericalangle D'PD = 60^\circ$ **1p**

c) Fie $DT \perp D'P$, $T \in D'P$
$DT \perp D'P$, $D'P \perp MN$, $DP \perp MN$, $D'P$, $MN \subset (D'MN) \Rightarrow DT \perp (D'MN) \Rightarrow$
$\Rightarrow d[D, (D'MN)] = DT$ **1p**

În triunghiul dreptunghic $D'DT$, $\sphericalangle DD'T = 30^\circ \Rightarrow DT = \frac{D'D}{2} = 3\sqrt{3}$ cm **1p**

Angi Tibor, Ditrău