A 75-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 15 februarie 2025

Clasa a VII-a
Soluții și bareme

Problema 1.

Fie $S = \sqrt{605} + \sqrt{2420} + \sqrt{5445} + \cdots + \sqrt{49005}$.

a) Dacă $n < \frac{S}{45} < n + 1$, determinați valoarea numărului natural n.

b) Determinați ultimele două cifre ale numărului S^2.

Supliment Gazeta Matematică S:E24.301

Soluție

a) $S = \sqrt{605} \cdot (\sqrt{1} + \sqrt{4} + \sqrt{9} + \cdots + \sqrt{81})$ **1p**
$S = \sqrt{605} \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 9) = \sqrt{605} \cdot 45$ **1p**
$\frac{S}{45} = \sqrt{605}$ **1p**
$24 = \sqrt{576} < \sqrt{605} < \sqrt{625} = 25$ **1p**
$n = 24$. **1p**

b) $S^2 = 605 \cdot 2025$ **1p**
$U_2(S^2) = 25$ **1p**

Problema 2.

Determinați numerele raționale a și b, dacă $|a + 1| - 2 = |b + 2| \cdot \sqrt{3} - |1 - \sqrt{3}|$.

***

Soluție

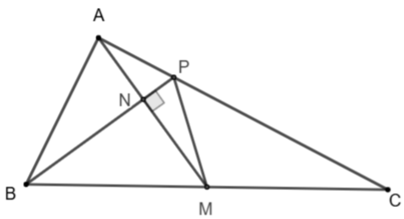
$|a + 1| - 2 = |b + 2| \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1$ **1p**
$\underbrace{|a + 1| - 3}_{\in\mathbb{Q}} = \underbrace{(|b + 2| - 1)}_{\in\mathbb{Q}} \cdot \sqrt{3}$ **1p**
$|b + 2| - 1 = 0 \Rightarrow |b + 2| = 1 \Rightarrow b = -1$ sau $b = -3$ **2p**
$|a + 1| - 3 = 0 \Rightarrow |a + 1| = 3 \Rightarrow a = 2$ sau $a = -4$ **2p**
$S = \{(2, -1), (2, -3), (-4, -1), (-4, -3)\}$ **1p**

Problema 3.

În triunghiul dreptunghic ABC avem $\widehat{A} = 90°$, $\widehat{C} = 30°$ și punctul M mijlocul laturii BC. Dacă perpendiculara dusă din punctul B pe mediana AM intersectează latura AC în punctul P, demonstrați că $PB = 2MP$.

***

Soluție 1.



.... **1p**

$AM \cap BP = \{N\}$, $AM = BM = MC = \frac{BC}{2}$ (1) **1p**

$\widehat{C} = 30° \Rightarrow AB = \frac{BC}{2}$ (2) **1p**

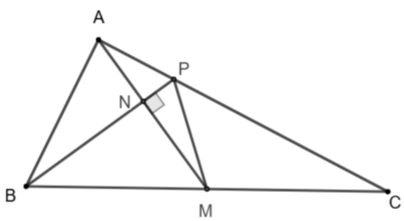
$(1),(2) \Rightarrow ABM$ triunghi echilateral $\Rightarrow BN$ înălțime, mediană și bisectoare în triunghiul ABM **1p**

$\widehat{ABN} = \widehat{NBM} = 30° \Rightarrow$ în triunghiul ABP, $AP = \frac{BP}{2}$ (3) **1p**

$AN = NM$ și $PN \perp AM \Rightarrow$ triunghiul APM este isoscel $\Rightarrow AP = PM$ (4) **1p**

$(3),(4) \Rightarrow PM = \frac{BP}{2} \Rightarrow BP = 2PM$ **1p**

Soluție 2.



.... **1p**

$AM \cap BP = \{N\}$, $AM = BM = MC = \frac{BC}{2}$ (1) **1p**

$\widehat{C} = 30° \Rightarrow AB = \frac{BC}{2}$ (2) **1p**

$(1),(2) \Rightarrow ABM$ triunghi echilateral **1p**

$\widehat{ABP} \equiv \widehat{MBP} = 30°$, $ABP_{\triangle} \equiv MBP_{\triangle}$ **1p**

$\widehat{PMB} = \widehat{PAB} = 90°$ **1p**

În triunghiul PMB, $PM = \frac{BP}{2} \Rightarrow PB = 2PM$ **1p**

Problema 4.

În pătratul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, M este mijlocul laturii AB și $AC \cap DM = \{N\}$. Dacă aria pătratului $ABCD$ este $432\,cm^2$, aflați aria triunghiului MNO.

Ionela Popa, Subcetate

Soluție

În triunghiul ABD DM și AO sunt mediane $\Rightarrow N$ este centru de greutate. **2p**

$A_{ABO_{\triangle}} = \frac{1}{2}A_{ABD_{\triangle}} = \frac{1}{4}A_{ABCD}$ **1p**

$A_{AMO_{\triangle}} = \frac{1}{2}A_{ABO_{\triangle}} = \frac{1}{8}A_{ABCD}$ **1p**

$NO = \frac{1}{3}AO$ **1p**

$A_{MNO_{\triangle}} = \frac{1}{3}A_{AMO_{\triangle}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}A_{ABCD} = \frac{1}{24}A_{ABCD}$ **1p**

$A_{MNO_{\triangle}} = \frac{432}{24} = 18cm^2$. **1p**