A 75-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 15 februarie 2024

Clasa a VI-a

Soluții și bareme

Problema 1. Avem un sac cu nuci. Dacă din sac scoatem nucile în grupe de câte 8, 12, respectiv 18, atunci în sac rămân 5, 9, respectiv 15 nuci.

a) Determinați numărul minim de nuci din sac.

b) Dacă în sac sunt între 200 și 250 de nuci, atunci care este numărul de nuci care satisface cerințele problemei?

Soluție

a) C.m.m.m.c. al numere naturale 8, 12 și 18 este 72. .... **2p**
Restul fiind cu 3 mai puțin decât împărțitorul rezultă că numărul căutat este $72 - 3 = 69$ **2p**
b) Dacă numărul nucilor trebuie să fie între 200 și 250, căutăm multiplul numărului 72 cuprins între 200 și 250, care este 216. .... **2p**
Deci numărul căutat este $216 - 3 = 213$. **1p**

Problema 2. Aflați numerele naturale x, y, z care îndeplinesc simultan condițiile de mai jos:

i) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$;

ii) $0,25y = 0,2z$;

iii) $4x + 5y + 6z = 364$.

Soluție

$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} | \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{12}$ (1) **1p**

$0,25y = 0,2z \Rightarrow \frac{y}{4} = \frac{z}{5} | \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{15}$. (2) **2p**

Din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15} = k$.

$x = 8k$, $y = 12k$, $z = 15k$. **2p**
Înlocuind în condiția dată obținem $32k + 60k + 90k = 364 \Rightarrow 182k = 364 \Rightarrow k = 2$ **1p**
Deci $x = 8 \cdot 2 = 16$; $y = 12 \cdot 2 = 24$; $z = 15 \cdot 2 = 30$ **1p**

Problema 3. Se consideră mulțimile:

$$A = \left\{\overline{ab} \mid \text{unde } \overline{ab} \text{ este număr prim și } u(\overline{ab}^{\,3}) = b\right\},$$

unde $u(m)$ este ultima cifră a lui m;

$$B = \left\{\overline{cd} \mid \ \text{unde } \left(\overline{cd} + \overline{cd}^{\,2}\right) \text{ este divizibil cu } 10\right\}.$$

Determinați cardinalul mulțimilor:

a) $A \cap B$;

b) $B \setminus A$.

***

Soluție

Dacă $u(\overline{ab}^{\,3}) = b$, atunci $b \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$ **1p**

$\overline{ab}$ fiind număr prim, acesta poate lua valorile $11, 19, 29, 31, 41, 59, 61, 71, 79, 89$;

deci $A = \{11, 19, 29, 31, 41, 59, 61, 71, 79, 89\}$ **1p**

Dacă $(\overline{cd} + \overline{cd}^{\,2}) \vdots 10$, atunci $d \in \{0, 4, 5, 9\}$. **1p**

Astfel $B = \{\overline{cd} | c \in \{1, \ldots, 9\}$ și $d \in \{0, 4, 5, 9\}\}$. **1p**

Card $B = 4 \cdot 9 = 36$. **1p**

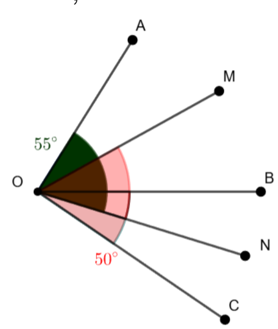
$A \cap B = \{19, 29, 59, 79, 89\}$, deci $\text{Card}(A \cap B) = 5$ **1p**

$\text{Card}(B \setminus A) = 36 - 5 = 31$. **1p**

Problema 4. Fie $(OM$, respectiv $(ON$, bisectoarele unghiurilor adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$. Știind că $\sphericalangle AON = 55°$, iar $\sphericalangle MOC = 50°$, determinați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$.

Gazeta Matematică: 10/S:E24.253

Soluție

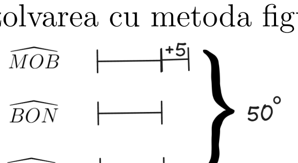


Desen **1p**

Dacă $\widehat{AON} = 55°$ și $\widehat{MOC} = 50° \Rightarrow \widehat{AON} - \widehat{MOC} = \widehat{AOM} - \widehat{NOC} = 5°$. **1p**

Deci $\widehat{AOM} = \widehat{NOC} + 5°$ **1p**

Rezolvarea cu metoda figurativă: din $\widehat{MOC} = 50°$ putem scrie



.... **2p**

Rezultă $\widehat{NOC} = 15°$ și $\widehat{AOM} = 20°$. **1p**

Deci $\widehat{AOB} = 40°$ și $\widehat{BOC} = 30°$. **1p**