

A 75-a Olimpiadă Națională de Matematică

Etapa zonală, 15 februarie 2025

Clasa a V-a

Soluții și bareme

Problema 1. Fie numerele

$$A = 2^{100} : \left[2^{50} \cdot 2^{48} + (2^{10} \cdot 2^{15})^5 : 2^{27} + (5^{76} : 5^{75} - 3)^{90} \cdot 2^8 + 2^{98} \right] \text{ și}$$

$$B = (41^2 - 82 + 1) : 8 : 5 - (2^6 - 2^5 + 2^2 - 2^0)$$

a) Calculați valoarea numerelor A și B .b) Calculați valoarea lui $(B^A + A^B)^A$.

Soluție

$$\text{a) } A = 2^{100} : (2^{98} + 2^{125} : 2^{27} + 2^{90} \cdot 2^8 + 2^{98}) \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$A = 2^{100} : (2^{98} + 2^{98} + 2^{98} + 2^{98}) = 2^{100} : (4 \cdot 2^{98}) = 2^{100} : 2^{100} = 1 \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

$$B = (41 \cdot 41 - 2 \cdot 41 + 1) : 8 : 5 - (64 - 32 + 4 - 1) \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$B = (41 \cdot 39 + 1) : 8 : 5 - 35 = 1600 : 8 : 5 - 35 = 40 - 35 = 5 \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

$$\text{b) } (B^A + A^B)^A = (5^1 + 1^5)^1 = 6^1 = 6 \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

Problema 2. Ana, Bea și Dana au mers la cumpărături, cheltuind în total 1200 de lei. Ana și Bea au cheltuit împreună cât a cheltuit Dana. Bea și Dana au cheltuit împreună de 5 ori mai mult decât Ana. Ce sumă a cheltuit fiecare copil în parte?

Simon József, Miercurea Ciuc

Soluție 1. Notăm cu A suma cheltuită de Ana, cu B suma cheltuită de Bea, respectiv cu D suma cheltuită de Dana. Folosim metoda figurativă.

$$\left. \begin{array}{l} A + B : \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ D : \quad \underline{\hspace{2cm}} \end{array} \right\} 1200$$

De aici obținem: $D = 1200 : 2 = 600$ lei. **2p**

$$\left. \begin{array}{l} A : \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ B + D : \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}} \end{array} \right\} 1200$$

De aici obținem: $A = 1200 : 6 = 200$ lei. **3p**Suma cheltuită de Bea este: $B = 1200 - 600 - 200 = 400$ lei. Verificare: $200 + 400 + 600 = 1200$ lei.Răspuns: Ana a cheltuit 200 de lei, Bea 400 de lei, iar Dana 600 de lei. **2p****Soluție 2.** Notăm cu A suma cheltuită de Ana, cu B suma cheltuită de Bea, respectiv cu D suma cheltuită

de Dana. Astfel $A + B + D = 1200$ **1p**
 Obținem:

$$\left. \begin{array}{l} A + B = D \\ A + B + D = 1200 \end{array} \right\} \Rightarrow D + D = 1200 \Rightarrow D = 1200 : 2 = 600 \text{ lei}$$

Deci suma cheltuită de Dana este 600 de lei. **2p**

$$\left. \begin{array}{l} B + D = 5 \cdot A \\ A + B + D = 1200 \end{array} \right\} \Rightarrow A + 5 \cdot A = 1200 \Rightarrow A = 1200 : 6 = 200 \text{ lei}$$

Deci suma cheltuită de Ana este 200 de lei. **2p**

$A + B = 200 \Rightarrow 200 + B = 600 \Rightarrow B = 400$ lei. Verificare: $200 + 400 + 600 = 1200$ lei. Răspuns: Ana a cheltuit 200 de lei, Bea 400 de lei, iar Dana 600 de lei. **2p**

Problema 3. Un sultan pune într-o zi deoparte 144 de monede de aur, după care în fiecare zi pune deoparte cu o monedă mai mult decât în ziua precedentă. După 1000 de zile împarte în mod egal monedele puse deoparte celor 143 de soții ale sale. Câte monede de aur primește o soție?

Kovács Lívía, Covasna

Soluție Monedele puse deoparte de sultan sunt distribuite în felul următor:

Prima zi 144 de monede. A 2-a zi $144 + 1 = 145$ de monede., A 3-a zi $144 + 2 = 146$ de monede. .. **1p**

⋮

A 1000-a zi $144 + 999 = 1143$ de monede. **2p**

În total, numărul monedelor puse deoparte este:

$$144 + 145 + 146 + \dots + 1142 + 1143 = (144 + 1143) \cdot 1000 : 2 = 643500 \text{ } **3p**$$

$$643500 : 143 = 4500$$

Fiecare soție primește 4500 de monede de aur. **1p**

Problema 4. În anul 2025 Mihai împlinește un număr de ani egal cu suma cifrelor anului în care s-a născut. În ce an s-ar fi putut naște Mihai?

Gazeta Matematică, GM:11/S:E24285

Soluție

Anul de naștere poate fi scris în forma $\overline{20ab}$ sau $\overline{19xy}$ **1p**

$$\begin{aligned} 2025 &= \overline{20ab} + 2 + a + b \Leftrightarrow 25 = 10 \cdot a + b + 2 + a + b \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 23 = 11a + 2b \Leftrightarrow a = 1, b = 6 \text{ (} a > 1 \text{ sau } a = 0 \text{ nu convine)} \end{aligned}$$

De aici obținem numărul 2016..... **2p**

Verificare: $2025 - 2016 = 9, 2 + 0 + 1 + 6 = 9$.

$$\begin{aligned} 2025 &= \overline{19xy} + 1 + 9 + x + y \Leftrightarrow 2025 = 1900 + 10 \cdot x + y + 10 + x + y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 115 = 11x + 2y \Leftrightarrow x = 9, y = 8 \text{ (} x < 9 \text{ nu convine)} \end{aligned}$$

De aici obținem numărul 1998..... **3p**

Verificare: $2025 - 1998 = 27, 1 + 9 + 9 + 8 = 27$.

Mihai s-ar fi putut naște în anul 2016 sau 1998. **1p**