Al 27-lea Concurs Național de Matematică Aplicată "Adolf Haimovici"
Etapa zonală, 15 februarie 2025

Clasa a XII-a - H2 - Științele naturii
Soluții și bareme

Problema 1.

Să se arate că $(G, \cdot)$ este un grup abelian, unde $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\} \subset M_3(\mathbb{R})$. **Soluție**

Fie $A(x) \in G \Rightarrow A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$

$A(y) \in G \Rightarrow A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & e^y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R}.$

$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x+y \\ 0 & e^{x+y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(x+y), \quad x+y \in \mathbb{R}$ **1p**

$\Rightarrow A(x) \cdot A(y) = A(x+y) \in G \Rightarrow G$ parte stabilă a mulțimii $M_3(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea **1p**

Înmulțirea matricelor este asociativă pe $M_3(\mathbb{R})$, așadar este asociativă și pe G **1p**

$A(0) = I_3 \in G$ este elementul neutru **1p**

$A(x) \cdot A(x') = A(x') \cdot A(x) = A(0)$

$A(x + x') = A(0) \Rightarrow x + x' = 0 \Rightarrow x' = -x \in \mathbb{R} \Rightarrow A(x') = A(-x), \forall x \in \mathbb{R}.$

Deci, toate elementele din G sunt simetrizabile **1p**

$A(x) \cdot A(y) = A(y) \cdot A(x) \Leftrightarrow A(x+y) = A(y+x)$

Deci, înmulțirea este comutativă pe G. **1p**

În concluzie, $(G, \cdot)$ este grup abelian. **1p**

Problema 2.

Se consideră mulțimea $M = (-\infty, 1)$. Pentru fiecare pereche $(x, y) \in M \times M$, notăm $x * y = \dfrac{2024 - xy}{2025 - x - y}$.

a) Arătați că funcția $(x, y) \mapsto x * y$ definește o lege de compoziție pe M.

b) Demonstrați că legea de compoziție "$*$" este comutativă și asociativă, dar nu admite element neutru.

Soluție

a) $\forall x, y \in M \Rightarrow x * y \in M$

$x < 1,\ y < 1 \Rightarrow (x-1)(y-1) > 0 \Rightarrow xy - x - y + 1 > 0 \Rightarrow -x - y + 1 > -xy$

$\Rightarrow 2025 - x - y > 2024 - xy$ **1p**

$-x > -1, -y > -1 \Rightarrow -x - y > -2 \Rightarrow 2025 - x - y > 2023 > 0$

$\Rightarrow \dfrac{2024 - xy}{2025 - x - y} < 1 \Rightarrow x * y \in M$ **1p**

b) $x * y = y * x \Leftrightarrow \dfrac{2024 - xy}{2025 - (x+y)} = \dfrac{2024 - yx}{2025 - (y+x)}$

Deci, $*$ este comutativită pe M, deoarece $+$ și $\cdot$ sunt comutative **1p**

$(x * y) * z = x * (y * z)$

$$(x * y) * z = \frac{2024 - \frac{2024 - xy}{2025 - x - y} z}{2025 - \frac{2024 - xy}{2025 - x - y} - z} = \frac{2024 \cdot 2025 - 2024\,(x + y + z) + xyz}{2025^2 - 2024 - 2025\,(x + y + z) + xy + yz + zx} \text{ ..... } \mathbf{1p}$$

$$x * (y * z) = \frac{2024 - x\frac{2024 - yz}{2025 - y - z}}{2025 - x - \frac{2024 - yz}{2025 - y - z}} = \frac{2024 \cdot 2025 - 2024\,(x + y + z) + xyz}{2025^2 - 2024 - 2025\,(x + y + z) + xy + yz + zx}$$

Deci, $*$ este asociativă pe M **1p**

$x * e = e * x = x \Rightarrow \dfrac{2024 - xe}{2025 - x - e} = x \Rightarrow 2024 - xe = 2025x - x^2 - xe$ **1p**

$\Rightarrow x^2 - 2025x + 2024 = 0 \Rightarrow x = 1 \notin M$ sau $x = 2024 \notin M$

$\Rightarrow *$ nu admite element neutru. **1p**

Problema 3.

Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx, \quad x > 0$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Soluție

a) $\displaystyle\int x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$ **2p**

$\displaystyle = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx == \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + C$ **2p**

b) $tg\dfrac{x}{2} = t \in (-1,1)\,, \quad x = 2arctgt, \quad dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt, \quad \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ **1p**

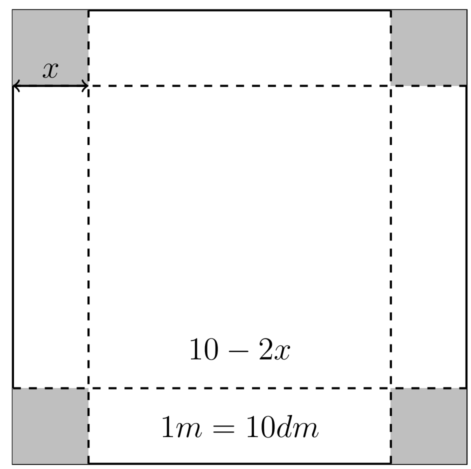
$$I = \int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}\,dt}{8 - \frac{8t}{1+t^2} + \frac{7-7t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{2\,dt}{t^2 - 8t + 15} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{(t-4)^2 - 1} = 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right| + C, \quad t \in (-1,1)$$ **1p**

$$I = \ln\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3}\right) + C$$ **1p**

Problema 4.

Dintr-o foaie de tablă având forma unui pătrat cu latura 1 m, se elimină din fiecare colț câte un pătrățel de latură x. Din bucata de tablă rămasă se confecționează o cutie paralelepipedică (fără capac), prin îndoire după liniile punctate. Demonstrați că volumul cutiei obținute nu poate depăși 74,(074) litri și determinați x, astfel încât volumul cutiei să fie maxim.



Soluție

Volumul cutiei $= (10-2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 40x^2 + 100x$ **1p**

Fie funcția $f : (0,5) \to \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 - 40x^2 + 100x$

$f'(x) = 12x^2 - 80x + 100 \qquad f'(x) = 0$ pentru $x = \dfrac{5}{3}$ **2p**

Pe intervalul $\left(0, \dfrac{5}{3}\right), \quad f'(x) > 0 \Rightarrow$ funcția f este crescătoare

Pe intervalul $\left(\dfrac{5}{3}, 5\right), \quad f'(x) < 0 \Rightarrow$ funcția f este descrescătoare

$\Rightarrow f(x) \le f\left(\dfrac{5}{3}\right)$ **2p**

$f\left(\dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{2000}{27} = 74,(074)dm^3$

Volumul cutiei nu poate depăși valoarea maximă a funcției, adică $74,(074)l$ **1p**

Volumul cutiei este maxim pentru $x = \dfrac{5}{3} = 1,(6)dm = 16,(6)cm$ **1p**