Al 27-lea Concurs Național de Matematică Aplicată ”Adolf Haimovici”

Etapa zonală, 15 februarie 2025

Clasa a XI-a - H2 - Științele naturii

Soluții și bareme

Problema 1. Să se determine matricea $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ astfel încât

$X^2 - 4X + 13I_2 = O_2$, unde $x, y \in \mathbb{R}$, $\quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $\mathrm{O}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Bede Emese, Covasna

Soluție

Calcularea lui X^2:

$X^2 = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix}$ **2p**

$\begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} + 13\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **1p**

Găsirea sistemului de ecuații: $\begin{cases} x^2 - y^2 - 4x + 13 = 0, \\ 2xy - 4y = 0. \end{cases}$ **1p**

Rezolvarea corectă a sistemului și finalizare (excluderea cazului $y = 0$, obținerea soluției: $(2, 3)$ și $(2, -3)$. Scrierea matricei X) **3p**

Problema 2.

a) Să se calculeze următoarea limită:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x \operatorname{tg} x} - 1}{e^{x \sin x} - 1}$$

b) Să se determine valorile numerelor reale a și b astfel încât să avem:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{ax^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + bx} \right) = \sqrt{2} - 1$$

Bede Emese, Covasna

Soluție

a)

Observarea nedeterminării $\frac{0}{0}$ și amplificare cu conjugatul. **1p**

Aplicarea limitei fundamentale: $\lim_{\mathrm{u(x)} \to 0} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{u(x)}} - 1}{\mathrm{u(x)}} = 1$ și simplificarea: $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$ **1p**

Finalizarea și obținerea limitei egale cu $\frac{1}{2}$ **1p**

b) Condiția a > 0 și recunoașterea nedeterminării $\infty - \infty$ **1p**

Amplificare cu conjugata și recunoașterea nedeterminării **1p**

Stabilirea condițiilor pentru obținerea valorilor lui a și b **1p**

Calcularea lui a $= 1$ și b $= 3 - 2\sqrt{2}$ **1p**

Problema 3. Un bazin este umplut complet printr-un robinet A în 6 ore. Același bazin este umplut printr-un alt robinet B în 8 ore. Acest bazin plin cu apă este golit prin scurgerea C în 10 ore. În cât timp se umple bazinul dacă:

a) robinetele A și B sunt deschise simultan;

b) este deschis robinetul B în același timp cu scurgerea C;

c) sunt deschise robinetul A și scurgerea C, în același timp;

d) sunt deschise robinetele A și B în același timp cu scurgerea C;

e) se umple 30% din bazin fiind deschise în același timp robinetele A și B, apoi robinetul B se închide;

f) se deschide robinetul A, apoi după 2 ore se deschide și B, iar după încă o oră se deschide și scurgerea C;

g) o treime a bazinului este umplută când se deschid, în același timp, robinetele A și B ?

Bede Emese, Covasna

Soluție

Fie x , y și z debitele robinetelor A, B respectiv scurgerii C, V volumul bazinului și t timpul necesar umplerii bazinului. $(V = 6x, V = 8y, V = 10z)$

a) scrierea relației: $t(x + y) = V$, și calcularea $t = \frac{24}{7}$ ore. **1p**

b) $t(y - z) = V, t = 40$ ore. **1p**

c) $t(x - z) = V, t = 15$ ore. **1p**

d) $t(x + y - z) = V, t = \frac{120}{23}$ ore. **1p**

e) $t = \frac{3}{10} \cdot \frac{24}{7} + t_1$, unde $t_1 \cdot x = \frac{7}{10}V \Rightarrow t_1 = \frac{42}{10}$ ore, deci $t = \frac{36}{35} + \frac{21}{5} = \frac{183}{35} ore$. **1p**

f) $2x + x + y + m(x + y - z) = V$, (timp necesar umplerii bazinului, după deschiderea scurgerii C) $m = \frac{45}{23}$ ore, $t = 2$ ore $+1$ oră $+\frac{45}{23}$ ore $= \frac{114}{23}$ ore. **1p**

g) $\frac{V}{3} + t(x + y) = V, t = \frac{16}{7}$ ore. **1p**

Problema 4. Fie un triunghi oarecare ABC, unde notăm lungimile laturilor cu $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ și h_a, h_b, respectiv h_c sunt înălțimile corespunzătoare fiecărei laturi în triunghi.

Demonstrați că: $\triangle = \begin{vmatrix} 1 & a & h_b \cdot h_c \\ 1 & b & h_a \cdot h_c \\ 1 & c & h_a \cdot h_b \end{vmatrix} = 0.$

Kisgyörgy Alpár, Sfântu Gheorghe

Soluție

$T = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$ **1p**

$h_a = \frac{2T}{a}$, $h_b = \frac{2T}{b}$, $h_c = \frac{2T}{c}$ **1p**

$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & a & h_b \cdot h_c \\ 0 & b-a & h_c \cdot (h_a - h_b) \\ 0 & c-a & h_b \cdot (h_a - h_c) \end{vmatrix} =$ **1p**

$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & h_c \cdot (h_a - h_b) \\ c-a & h_b \cdot (h_a - h_c) \end{vmatrix} =$ **1p**

$= \begin{vmatrix} b-a & \frac{2T}{c} \cdot (\frac{2T}{a} - \frac{2T}{b}) \\ c-a & \frac{2T}{b} \cdot (\frac{2T}{a} - \frac{2T}{c}) \end{vmatrix} =$ **1p**

$= \begin{vmatrix} b-a & \frac{4T^2}{abc} \cdot (b-a) \\ c-a & \frac{4T^2}{abc} \cdot (c-a) \end{vmatrix} =$ **1p**

$= \frac{4T^2}{abc} \cdot (b-a)(c-a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ **1p**