Al 27-lea Concurs Național de Matematică Aplicată "Adolf Haimovici"
Etapa zonală, 15 februarie 2025

Clasa a X-a - H2 - Științele naturii

Soluții și bareme

Problema 1. Se consideră numărul complex $z = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$, și $S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n,\ n \in \mathbb{N}$.

a) Demonstrați că $z^2 + z + 1 = 0$.

b) Determinați valorile lui S_5 și S_6.

Miklós József, Târgu Secuiesc

Soluție

Amplificăm z cu conjugata numitorului și obținem $z = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ **2p**

$z^2 = \left(\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ **1p**

$z^2 + z + 1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} + 1 = -\dfrac{2}{2} + 1 = 0$ **1p**

b) $S_5 = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 1 + z + z^2 + z^3(1 + z + z^2) = 0 + z^3 \cdot 0 = 0$ **2p**

$S_6 = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 1 + z \cdot S_5 = 1 + z \cdot 0 = 1$ **1p**

Problema 2. Fie $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Arătați că:

$$\frac{1}{\log_a 3 \cdot \log_a 9} + \frac{1}{\log_a 9 \cdot \log_a 27} + \cdots + \frac{1}{\log_a 3^{2024} \cdot \log_a 3^{2025}} = \frac{2024}{2025} \cdot \frac{1}{\log_a^2 3}.$$

Kovács Lívia, Covasna

Soluție

Membrul stâng al egalității se scrie în forma:

$\log_3 a \cdot \log_9 a + \log_9 a \cdot \log_{27} a + \cdots + \log_{3^{2024}} a \cdot \log_{3^{2025}} a =$ **2p**

$= \log_3 a \cdot \dfrac{\log_3 a}{2} + \dfrac{\log_3 a}{2} \cdot \dfrac{\log_3 a}{3} + \cdots + \dfrac{\log_3 a}{2024} \cdot \dfrac{\log_3 a}{2025} =$ **1p**

$= \log_3^2 a \cdot \left(\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{2024 \cdot 2025}\right) =$ **1p**

$= \dfrac{1}{\log_3^2 a} \cdot \left(1 - \dfrac{1}{2025}\right) = \dfrac{1}{\log_3^2 a} \cdot \dfrac{2024}{2025}$ **3p**

Problema 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale următoarea ecuație:

$$\frac{\sqrt{3 - 2a} + \sqrt{2a}}{\sqrt{1 + 2a} + \sqrt{2(1 - a)}} = \frac{\sqrt{-2a^2 + 3a}}{\sqrt{-2a^2 + a + 1}}$$

György Éva, Gheorgheni

Soluție

$-2a^2+a+1=(2a+1)(1-a)$ și ecuația devine: $\dfrac{\sqrt{3-2a}+\sqrt{2a}}{\sqrt{2a+1}+\sqrt{2(1-a)}}=\dfrac{\sqrt{a(3-2a)}}{\sqrt{(2a+1)(1-a)}}$ **1p**

Ecuația are sens, dacă $3-2a\geq 0$, $a\geq 0$, $2a+1>0$ și $1-a>0$. Deci $a\in[0,1)$ **1p**

Ridicăm la pătrat ambele părți: $\dfrac{3-2a+2a+2\sqrt{2a(3-2a)}}{2a+1+2-2a+2\sqrt{2(2a+1)(1-a)}}=\dfrac{a(3-2a)}{(2a+1)(1-a)}$

$\dfrac{3+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{a(3-2a)}}{3+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{(2a+1)(1-a)}}=\dfrac{a(3-2a)}{(2a+1)(1-a)}$

.... **1p**

Fie $x=\sqrt{a(3-2a)}\geq 0$ și $y=\sqrt{(2a+1)(1-a)}>0$. Atunci: $\dfrac{3+2\sqrt{2}x}{3+2\sqrt{2}y}=\dfrac{x^2}{y^2}$ **1p**

$3x^2-3y^2+2\sqrt{2}yx^2-2\sqrt{2}xy^2=0\iff(x-y)[3(x+y)+2\sqrt{2}xy]=0$ **1p**

$3(x+y)+2\sqrt{2}xy>0,\forall x\geq 0,\forall y>0\Rightarrow x-y=0\Rightarrow x=y$ **1p**

$\sqrt{a(3-2a)}=\sqrt{(2a+1)(1-a)}\Leftrightarrow 3a-2a^2=-2a^2+a+1\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}\in[0,1)\Rightarrow S_a=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ **1p**

Problema 4.

Doru și Remus construiesc un mozaic pătrat din plăci de gresie pătrate identice. Remus pune o placă neagră în centru. Doru pune 8 plăci albe în jurul ei, formând un al doilea pătrat. Remus pune 16 plăci negre în jurul acestora, formând al treilea pătrat.

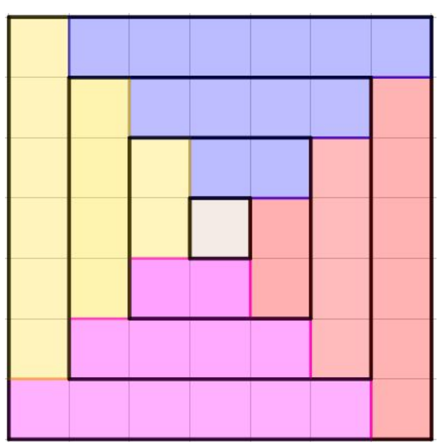
a) De câte plăci are nevoie Remus pentru a completa cel de-al unsprezecelea pătrat?

b) Câte plăci a pus Doru dacă în total au fost 20 de pătrate?

György Éva, Gheorghenii

Soluție

Soluția 1



a)

Observăm că pe fiecare latură numărul pătrățelelor adăugate crește cu 2 față de numărul pătrățelelor adăugate în pasul precedent. Deci începând cu al doilea pătrat se formează o progresie aritmetică cu rația $4 \times 2 = 8$: $a_n = a_2 + (n-2) \cdot r = 8 + (n-2) \cdot 8 = 8(n-1)$ pentru $n \geq 2$ **4p**

Pentru cel de-al 11-lea pătrat Remus are nevoie de $a_{11} = 8 + 9 \cdot 8 = 80$ plăci. **1p**

b) Doru a pus $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20} = 8 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 8 \cdot 5 + \cdots + 8 \cdot 19 = 800$ plăci. **2p**

Soluția 2

a) Mărimea pătratelor este 1×1, 3×3, 5×5, adică al n-lea pătrat este de mărimea $(2n-1) \times (2n-1)$. Numărul pătrățelelor adăugate pentru $n \geq 2$ este diferența ariilor $a_n = (2n-1)^2 - (2n-3)^2 = 4n^2 - 4n + 1 - 4n^2 + 12n - 9 = 8n - 8$. **4p**

Pentru cel de-al 11-lea pătrat Remus are nevoie de $a_{11} = 8 \cdot 11 - 8 = 80$ plăci. **1p**

b) Doru a pus $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20} = 8 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 8 \cdot 5 + \cdots + 8 \cdot 19 = 800$ plăci. **2p**