Al 27-lea Concurs Național de Matematică Aplicată "Adolf Haimovici"
Etapa zonală, 15 februarie 2025

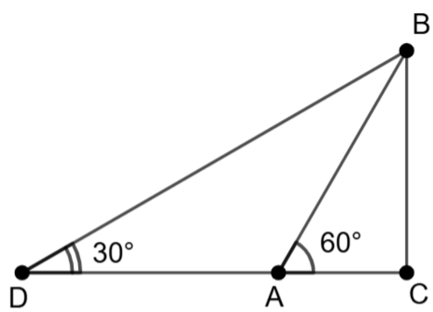
Clasa a IX-a - H2 - Științele naturii
Soluții și bareme

Problema 1.

Un om care stă pe malul unui râu vede un copac pe malul îndepărtat la un unghi de $60°$.
Dacă se îndepărtează cu 20 m de mal, vede același copac la un unghi de $30°$.
Calculați înălțimea copacului și lățimea râului.

Urus József-Norbert, Sfântu Gheorghe

Soluție.
Modelarea matematică a problemei: în triunghiul dreptunghic BCD să fie $\widehat{BCD} = 90°$, $\widehat{CDB} = 30°$ și $A \in (CD)$ astfel încât $\widehat{BAC} = 60°$. În acest context punctul A reprezintă primul loc de observație, iar punctul D cel de al doilea. Știind că $AD = 20$ m, va trebui să calculăm lungimea segmentelor AC și BC. **2p**
În triunghiul ABD: $\widehat{BAD} = 120°$ și $\widehat{ABD} = \widehat{ADB} = 30°$, de aceea ABD este un triunghi isoscel $\Longrightarrow AB = AD = 20$ m. **1p**
În triunghiul ABC: $\widehat{BCA} = 90°$ și $\widehat{ABC} = 30°$, de aceea, prin teorema unghiului de $30°$, obținem că $AC = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{20}{2} = 10$ m. **1p**
Aplicând teorema lui Pitagora în $ABC_{\triangle}$: $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$ m. ... **1p**
Așadar, înălțimea copacului este $10\sqrt{3}$ m, iar lățimea râului este 10 m. **2p**



Problema 2.

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația:

$$\min(1-2x, 2-x) \geq \max(x+1, 2x-1).$$

Urus József-Norbert, Sfântu Gheorghe

Soluția I.
Patru cazuri pot fi discutate după termenii din stânga și din dreapta a inegalității date. **1p**
Cazul I.:

$$\begin{cases} \min(1-2x, 2-x) = 1-2x \\ \max(x+1, 2x-1) = x+1. \end{cases}$$

Adică:

$$\begin{cases} 1-2x \leq 2-x \\ x+1 \geq 2x-1 \\ 1-2x \geq x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} -x \leq 1 \\ -x \geq -2 \\ -3x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 2 \\ x \leq 0. \end{cases}$$

Deci mulțimea soluțiilor în acest caz este $M_1 = [-1, 0]$. **1p**

Cazul al II-lea:

$$\begin{cases} \min(1-2x, 2-x) = 1-2x \\ \max(x+1, 2x-1) = 2x-1. \end{cases}$$

Adică:

$$\begin{cases} 1-2x \leq 2-x \\ x+1 \leq 2x-1 \\ 1-2x \geq 2x-1 \end{cases} \iff \begin{cases} -x \leq 1 \\ -x \leq -2 \\ -4x \geq -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 2 \\ x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Deci mulțimea soluțiilor în acest caz este $M_2 = \emptyset$. **1p**

Cazul al III-lea:

$$\begin{cases} \min(1-2x, 2-x) = 2-x \\ \max(x+1, 2x-1) = x+1. \end{cases}$$

Adică:

$$\begin{cases} 1-2x \geq 2-x \\ x+1 \geq 2x-1 \\ 2-x \geq x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} -x \geq 1 \\ -x \geq -2 \\ -2x \geq -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -1 \\ x \leq 2 \\ x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Deci mulțimea soluțiilor în acest caz este $M_3 = [-\infty, -1]$. **1p**

Cazul al IV-lea:

$$\begin{cases} \min(1-2x, 2-x) = 2-x \\ \max(x+1, 2x-1) = 2x-1. \end{cases}$$

Adică:

$$\begin{cases} 1-2x \geq 2-x \\ x+1 \leq 2x-1 \\ 2-x \geq 2x-1 \end{cases} \iff \begin{cases} -x \geq 1 \\ -x \leq -2 \\ -3x \geq -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2 \\ x \leq 1. \end{cases}$$

Deci mulțimea soluțiilor în acest caz este $M_4 = \emptyset$. **1p**

Așadar, mulțimea soluțiilor al inegalității date este:

$$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 = (-\infty, 0]\,.$$

. . . . **2p**

Soluția al II-lea.

$$\min(1-2x, 2-x) = \begin{cases} 1-2x, & \text{dacă} \quad 1-2x \leq 2-x \\ 2-x, & \text{dacă} \quad 1-2x \geq 2-x \end{cases} \implies \begin{cases} 1-2x, & \text{dacă} \quad x \in (-1, +\infty) \\ 2-x, & \text{dacă} \quad x \in (-\infty, -1]. \end{cases}$$

. . . . **1p**

$$\max(x+1, 2x-1) = \begin{cases} x+1, & \text{dacă} \quad x+1 > 2x-1 \\ 2x-1, & \text{dacă} \quad x+1 \leq 2x-1 \end{cases} \implies \begin{cases} 1-2x, & \text{dacă} \quad x \in (-\infty, 2) \\ 2-x, & \text{dacă} \quad x \in [2, +\infty). \end{cases}$$

. . . . **1p**

Distingem 3 cazuri: $x \in (-\infty, -1]$; $x \in (-1, 2)$; $x \in [2, +\infty)$. **1p**

Cazul I.:

$$x \in (-\infty, -1] \implies 2-x \geq x+1 \implies 2x \leq 1 \implies x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right].$$

$$M_1 = (-\infty, -1] \cap \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \implies M_1 = (-\infty, -1].$$

. . . . **1p**

Cazul II.:

$$x \in (-1, 2) \implies 1-2x \geq x+1 \implies 3x \leq 0 \implies x \in (-\infty, 0].$$

$$M_2 = (-1, 2) \cap (-\infty, 0] \implies M_2 = (-1, 0].$$

. . . . **1p**

Cazul III.:

$$x \in [2, +\infty) \implies 1-2x \geq 2x-1 \implies 4x \leq 2 \implies x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right].$$

$$M_3 = [2, +\infty) \cap \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \implies M_3 = \emptyset.$$

. . . . **1p**

Așadar $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 = (-\infty, -1] \cup (-1, 0] = (-\infty, 0]$. **1p**

Problema 3.

Notăm cu S_n suma primilor n termeni ai șirului $(a_n)_{n\geq 1}$

a) Dacă $S_n = n^2 + 3n$, arătați că $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică.

b) Calculați suma:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{a_{510}}+\sqrt{a_{511}}}.$$

Szabó Andrea, Covasna

Soluție.

a) $a_n = S_n - S_{n-1}$,
$S_{n-1} = (n-1)^2 + 3(n-1) = n^2 - 2n + 1 + 3n - 3 = n^2 + n - 2$. **2p**
$a_n = n^2 + 3n - n^2 - n + 2 = 2n + 2$ Demonstăm că $a_n = \dfrac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$.
Adică $2n + 2 = \dfrac{2n+2+2+2n-2+2}{2} \iff 2n+2 = \dfrac{4n+4}{2}$, ceea ce este adevărată. **1p**
În acest caz $a_n = 2n + 2$, $a_1 = 4$ și $r = 2$.

b) Calculăm suma cerută:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{510}}+\sqrt{a_{511}}} &= \frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_1+a_2}+\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{a_2-a_3}+...+\frac{\sqrt{a_{510}}-\sqrt{a_{511}}}{a_{510}-a_{511}} = \\
&= \frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{-r}+\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{-r}+...+\frac{\sqrt{a_{510}}-\sqrt{a_{511}}}{-r} = \\
&= \frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}+\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}+...+\sqrt{a_{510}}-\sqrt{a_{511}}}{-r} = \\
&= \frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_{511}}}{-r} = \\
&= \frac{\sqrt{4}-\sqrt{1024}}{-2} = \\
&= \frac{2-32}{-2} = \\
&= 15
\end{aligned}$$

Raționalizare **1p**
Calcule **2p**
$a_{510} = 2 \cdot 510 + 2 = 1022 + 2 = 1024$. **1p**

Problema 4.

În planul triunghiului ABC se consideră punctele D, E, F, M, N, astfel încât:

$$\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{CE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FC},\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0},\ \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{NE}\,.$$

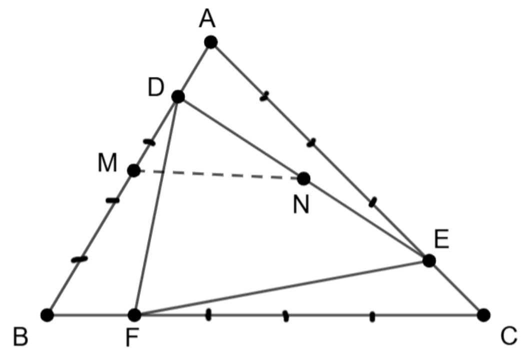
a) Exprimați vectorul $\overrightarrow{MN}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$.

b) Aflați numărul real x, dacă între ariile triunghiurilor există relația $A_{DEF_\Delta} = x \cdot A_{ABC_\Delta}$.

***

Soluție.

a) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$,
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EN}$. **1p**
$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \left(\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{EN}\right) = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$.
$\overrightarrow{BD} = 4 \cdot \overrightarrow{DA} \Longrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{AB}$,
$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{CA} \Longrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{4}{5} \cdot \overrightarrow{AC}$. **2p**
$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \frac{4}{5} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{4}{5} \cdot \left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$
$\overrightarrow{MN} = \frac{2}{5} \cdot \left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ **1p**



b) $A_{DEF_\Delta} = A_{ABC_\Delta} - (A_{ADE_\Delta} + A_{BDF_\Delta} + A_{EFC_\Delta})$ **1p**
$A_{ADE_\Delta} = \frac{b \cdot \hat{\imath}}{2} = \frac{AD \cdot h_E}{2} = \frac{\frac{1}{5}AB \cdot \frac{4}{5}h_C}{2} = \frac{4}{25} \cdot A_{ABC_\Delta}$
Analog $A_{BDF_\Delta} = \frac{4}{25} \cdot A_{ABC_\Delta}$, $A_{EFC_\Delta} = \frac{4}{25} \cdot A_{ABC_\Delta}$ **1p**
$A_{DEF_\Delta} = A_{ABC_\Delta} - \frac{12}{25} \cdot A_{ABC_\Delta} \Longrightarrow A_{DEF_\Delta} = \frac{13}{25} \cdot A_{ABC_\Delta} \Longrightarrow x = \frac{13}{25}$. **1p**