Al 27-lea Concurs Național de Matematică Aplicată ,,Adolf Haimovici"
Etapa zonală, 15 februarie 2025

Clasa a XII-a - H1 - Tehnic
Soluții și bareme

Problema 1. Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție asociativă
$x \circ y = 3xy - 3x - 3y + 4$.

a) Arătați că intervalul $(1, +\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție "$\circ$".

b) Determinați simetricul numărului 3 în intervalul $(1, +\infty)$ în raport cu legea de compoziție "$\circ$".

c) Rezolvați ecuația $x * x * x = 1126$ în mulțimea numerelor reale.

Soluție

a) $x, y \in (1, +\infty) \Rightarrow x > 1, y > 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ y - 1 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (x-1)(y-1) > 0 \Rightarrow xy - x - y + 1 > 0 \Rightarrow 3xy - 3x - 3y + 3 > 0 \Rightarrow x \circ y \in (1, +\infty)$ deci intervalul $(1, +\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de operație "$\circ$". **2p**

b) Determinăm elementul neutru: $x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in (1, +\infty)$

Legea "$\circ$" este comutativă, deci vom studia doar ecuția $x \circ e = x, \forall x \in (1, +\infty)$

$3xe - 3x - 3e + 4 = x$

$3xe - 3e = 4x - 4$

$3e(x-1) = 4(x-1), \forall x \in (1, +\infty \Rightarrow e = \frac{4}{3}$ **1p**

Notăm cu z simetricul lui 3 în raport cu legea de compoziție "$\circ$"

$3 \circ z = z \circ 3 = e$

$3 \circ z = \frac{4}{3}$

$3 \cdot 3z - 3 \cdot 3 - 3z + 4 = \frac{4}{3}$

$6z - 5 = \frac{4}{3}$

$6z = \frac{19}{3}$

$z = \frac{19}{18} \in (1, +\infty)$ **1p**

c) $x \circ y = 3xy - 3x - 3y + 4 = 3xy - 3x - 3y + 3 + 1 = 3x(y - 1 - 3(y-1) + 1 =$
$3(x-1)(y-1) + 1 \Rightarrow x \circ x = 3(x-1)^2 + 1$ **1p**

$\Rightarrow x \circ x \circ x = 9(x-1)^3 + 1$

$x \circ x \circ x = 1126 \Leftrightarrow 9(x-1)^3 + 1 = 1126$ **1p**

$\Leftrightarrow 9(x-1)^3 = 1125 \Leftrightarrow (x-1)^3 = 125 \Leftrightarrow x - 1 = 5 \Leftrightarrow x = 6$ **1p**

Problema 2.

Se consideră funcțiile $f, F : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$, $F(x) = (ax + b)\ln x - cx$.

$a)$ Determinați numerele reale a, b, c astfel încât funcția F să fie o primitivă a funcției f.

$b)$ Determinați primitiva F a funcției f cu proprietatea $F(1) = 0$.

Soluție

$a)$ $F^{'}(x) = a\ln x + \dfrac{x(a-c)+b}{x}, x \in [1, +\infty)$ **2p**

$F^{'}(x) = f(x), \forall x \in [1, +\infty) \Rightarrow a\ln x + \dfrac{b}{x} + a - c = \ln x + \dfrac{1}{x}, \forall x \in [1, +\infty) \Rightarrow$

.... **1p**

$(a-1)\ln x + \dfrac{b-1}{x} + a - c = 0, \quad \forall x \in [1, +\infty)$ Pentru $x = 1 \Rightarrow b - 1 + a - c = 0 \Rightarrow$

$(a-1)\ln x + \dfrac{b-1}{x} + 1 - b = 0, \quad \forall x \in [1, +\infty) \Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty}\left[(a-1)\ln x + \frac{b-1}{x} + 1 - b\right] = 0$$

$\Rightarrow (a-1)\cdot(+\infty) + 0 + 1 - b = 0 \Rightarrow a - 1 = 0$ și $1 - b = 0 \Rightarrow a = 1$ și $b = 1$

$a = 1$, $b = 1$, $b - 1 + a - c = 0 \Rightarrow c = 1$

.... **2p**

Din subpunctul a) $\Rightarrow F(x) = (x+1)\ln x - x + k$ **1p**

Din $F(1) = 0$ deducem $k = 1$, deci primitiva căutată este $F : [1, +\infty) \to \mathbb{R}, F(x) = (x+1)\ln x - x + 1$ **1p**

Problema 3. (S:L24.311)

$a)$ Determinați ordinul elementului $\widehat{6}$ în grupul $(\mathbb{Z}_{15}, +)$.

$b)$ Determinați ordinele elementelor grupului $(U(\mathbb{Z}_{15}), \cdot)$.

$c)$ Determinați inversul lui $\widehat{13}$ în grupul $(\mathbb{Z}^*_{71}, \cdot)$.

(S:L24.311)

Soluție

$a)$ $(\mathbb{Z}_{15}, +) \quad e = \widehat{0}$

$\widehat{6} + \widehat{6} = \widehat{12}$

$\widehat{6} + \widehat{6} + \widehat{6} = \widehat{3}$

$\widehat{6} + \widehat{6} + \widehat{6} + \widehat{6} = \widehat{9}$

$\widehat{6} + \widehat{6} + \widehat{6} + \widehat{6} + \widehat{6} = \widehat{0} \Rightarrow \text{ord } \widehat{6} = \widehat{5}$ .... **2p** *b)* $(U(\mathbb{Z}_{15}),\cdot) = \{\widehat{n} \in \mathbb{Z}_{15} \mid (15, n) = 1\} = \left\{\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{4}, \widehat{7}, \widehat{8}, \widehat{11}, \widehat{13}, \widehat{14}\right\}$ **1p**

$\widehat{e} = \widehat{1}$
ord $\widehat{1} = 1$
$\widehat{2}^4 = \widehat{1} \Rightarrow$ ord $\widehat{2} = 4$
$\widehat{4}^2 = \widehat{1} \Rightarrow$ord $\widehat{4} = 2$
$\widehat{7}^4 = \widehat{1} \Rightarrow$ ord $\widehat{7} = 4$
$\widehat{8}^4 = \widehat{1} \Rightarrow$ ord $\widehat{8} = 4$
$\widehat{11}^2 = \widehat{1} \Rightarrow$ ord $\widehat{11} = 2$
$\widehat{13}^4 = \widehat{1} \Rightarrow$ ord $\widehat{13} = 4$
$\widehat{14}^2 = \widehat{1} \Rightarrow$ ord $\widehat{14} = 2$

.... **2p**

c)

$\cdot$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{4}$	$\widehat{5}$	$\widehat{6}$	$\widehat{7}$	$\widehat{8}$	$\widehat{9}$	$\widehat{10}$	$\widehat{11}$
$\widehat{13}$	$\widehat{13}$	$\widehat{26}$	$\widehat{39}$	$\widehat{52}$	$\widehat{65}$	$\widehat{7}$	$\widehat{20}$	$\widehat{33}$	$\widehat{46}$	$\widehat{59}$	$\widehat{1}$

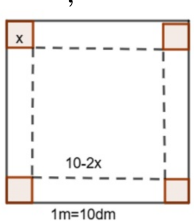
.... **1p**

$\widehat{13} \cdot \widehat{11} = \widehat{1} \Rightarrow \widehat{13}' = \widehat{1}$ **1p**

Problema 4.

Dintr-o foaie de tablă având forma unui pătrat cu latura 1m, se elimină din fiecare colț câte un pătrățel de latură x. Din bucata de tablă rămasă se confecționează o cutie paralelepipedică (fără capac), prin îndoire după liniile punctate. Demonstrați că volumul cutiei obținute nu poate depășii 74,(074), litri și determinați x astfel încât volumul cutiei să fie maxim.

Soluție



Volumul cutiei $= (10 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 40x^2 + 100x$ **1p**

Fie funcția $f : (0, 5) \to \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 - 40x^2 + 100x$
$f'(x) = 12x^2 - 80x + 100 \qquad f'(x) = 0$ pentru $x = \dfrac{5}{3}$ **2p**

Pe intervalul $\left(0, \dfrac{5}{3}\right)$ $f'(x) > 0 \Rightarrow$ funcția f este crescătoare

pe intervalul $\left(\dfrac{5}{3}, 5\right)$ $f'(x) < 0 \Rightarrow$ funcția f este descrescătoare

$\Rightarrow f(x) \leq f\left(\dfrac{5}{3}\right)$ **2p**

$f\left(\dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{2000}{27} = 74,(074)dm^3$

Volumul cutiei nu poate depăși valoarea maximă a funcției, adică $74,(074)l$ **1p**

Volumul cutiei este maxim pentru $x = \dfrac{5}{3} = 1,(6)dm = 16(6)cm$ **1p**