Al 27-lea Concurs Național de Matematică Aplicată ,,Adolf Haimovici"
Etapa zonală, 15 februarie 2025
Clasa a XI-a - H1 - Tehnic
Soluții și bareme

Problema 1. Determinați matricea $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ astfel încât $X^2 - 4X + 13I_2 = O_2$, unde $x, y \in \mathbb{R}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Bede Emese, Covasna

Soluție

Calcularea lui $X^2 = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix}$ **2p**

$X^2 - 4X + 13I_2 = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4x & 4y \\ -4y & 4x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} x^2 - y^2 - 4x + 13 & 2xy - 4y \\ -2xy + 4y & x^2 - y^2 - 4x + 13 \end{pmatrix}$ **1p**

Găsirea sistemului de ecuații: $\begin{cases} x^2 - y^2 - 4x + 13 = 0 \\ 2xy - 4y = 0 \end{cases}$ **1p**

Rezolvarea corectă a sistemului:

Dacă $y = 0 \Longrightarrow x^2 - 4x + 13 = 0$ nu are soluții reale. **1p**

Dacă $x = 2 \Longrightarrow y^2 - 9 = 0 \Longrightarrow y_1 = 3$ și $y_2 = -3$. **1p**

Deci $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ **1p**

Problema 2. Se consideră determinantul $D(a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $D(4)$!

b) Demonstrați că $D(a) = (a-1)(a-2)$!

c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $D(2^x) = 0$!

Miklós József, Târgu Secuiesc

Soluție

a) $D(4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 32 + 4 + 4 - 2 - 16 - 16 = 6$ **1p**

b) $D(a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix} = 2a^2 + a + 4 - 2 - 4a - a^2 = a^2 - 3a + 2 = (a-1)(a-2)$ **2p**

c) $D(2^x) = 0 \iff (2^x - 1)(2^x - 2) = 0$ **2p**

Dacă $2^x - 1 = 0 \iff x = 0 \in \mathbb{R}$ **1p**

Dacă $2^x - 2 = 0 \iff x = 1 \in \mathbb{R}$ **1p**

Problema 3. Fie funcția $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\frac{4x^2+ax+1}{bx+1}}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determinați domeniul maxim de definiție D al funcției f, fiind date $a = 5$ și $b = 2$.

b) Aflați numerele reale a și b, dacă dreapta de ecuație $y = 2x + 3$ este asimptotă spre $+\infty$ pentru funcția $g : D \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = f^2(x)$!

Vargha Erzsébet, Târgu Secuiesc

Soluție

a) Condiția de existență a radicalului și a fracției $\frac{4x^2+5x+1}{2x+1} \geq 0$ și $2x + 1 \neq 0$ **1p**
Deci $D = \big[-1, -\frac{1}{2} \big) \cup \big[-\frac{1}{4}, +\infty \big)$ **2p**

b) Dacă $g(x) = f^2(x) \Longrightarrow g(x) = \frac{4x^2+ax+1}{bx+1}$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2+ax+1}{bx^2+x} = \frac{4}{b}$$

.... **1p**

Deci $\frac{4}{b} = 2 \Longrightarrow b = 2$ **1p**

$$n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{4x^2 - ax + 1}{2x+1} - 2x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{-(a+2)x+1}{2x+1} = \frac{-(a+2)}{2}$$

.... **1p**

Deci $\frac{-(a+2)}{2} = 3 \Longrightarrow a = -8$ **1p**

Problema 4. Câțiva dintre angajații unei firme au fost solicitați să presteze ore suplimentare (peste program sau în weekend), în acest caz ei fiind plătiți cu 20 lei/oră, față de 10 lei/oră pentru munca prestată în timpul programului normal. Pentru luna octombrie, serviciul de contabilitate a primit situația din tabelul de mai jos:

	Număr de ore lucrate în program normal	Număr de ore suplimentare
Antonescu	160	40
Cristescu	160	56
Enescu	160	60
Ionescu	160	32
Popescu	160	24
Teodorescu	144	48

a) Scrieți și calculați plata drepturilor salariale ale celor șase angajați ca un produs de matrice.

b) Dacă aceeași regulă s-a păstrat și pentru luna noiembrie, contabilitatea calculând salariile după produsul matriceal $\begin{pmatrix} 160 & 36 \\ 0 & 0 \\ 80 & 16 \\ 96 & 32 \\ 128 & 56 \\ 144 & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.

Calculați ce sumă de bani a primit în total, în cele două luni, angajatul Cristescu!

c) Calculați câte ore suplimentare a lucrat Teodorescu în luna noiembrie, știind că pentru munca prestată în cele două luni a primit suma de 4 000 de lei!

Vargha Erzsébet, Târgu Secuiesc

Soluție

a) Calcularea produsului de matrici $\begin{pmatrix} 160 & 40 \\ 160 & 56 \\ 160 & 60 \\ 160 & 32 \\ 160 & 24 \\ 144 & 48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2400 \\ 2720 \\ 2800 \\ 2240 \\ 2080 \\ 2400 \end{pmatrix}$ **2p**

Astfel plata drepturilor salariale pentru luna octombrie ale celor șase angajați este:

Antonescu	2400
Cristescu	2720
Enescu	2800
Ionescu	2240
Popescu	2080
Teodorescu	2400

.... **1p**

b) Pentru luna noiembrie, avem produsul matricial:

$$\begin{pmatrix} 160 & 36 \\ 0 & 0 \\ 80 & 16 \\ 96 & 32 \\ 128 & 56 \\ 114 & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2320 \\ 0 \\ 1120 \\ 1600 \\ 2400 \\ 1440 + 20n \end{pmatrix}$$

. . . . **1p**

Salariul pentru cele două luni al lui Cristescu este $2720 + 0 = 2720$ lei **1p**

c) Scriem $2400 + 1440 + 20n = 4000$ de unde numărul de ore suplimentare pe luna noiembrie ale lui Teodorescu este $n = 8$ ore **2p**