Al 27-lea Concurs Național de Matematică Aplicată ,,Adolf Haimovici"
Etapa zonală, 15 februarie 2025

Clasa a X-a - H1 - Tehnic
Soluții și bareme

Problema 1.
a) Calculați valoarea lui $\dfrac{\log_2 48}{\log_6 2} - \dfrac{\log_2 3}{\log_{96} 2}$.
b) Demonstrați că $\log_{3+2\sqrt{2}}(3-2\sqrt{2}) + \log_{3-2\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2}) = -2$.
c) Se consideră $a = \lg 45$ și $b = \lg 75$. Exprimați $\lg 15$ în funcție de a și b.

*****

Soluție

a) $\log_2 48 = \log_2(2^4 \cdot 3) = 4 + \log_2 3$ **1p**

$\log_6 2 = \dfrac{1}{\log_2 6} = \dfrac{1}{\log_2(2\cdot 3)} = \dfrac{1}{1+\log_2 3}$

$\log_{96} 2 = \dfrac{1}{\log_2 96} = \dfrac{1}{\log_2(2^5\cdot 3)} = \dfrac{1}{5+\log_2 3}$

.... **1p**

Fie $a = \log_2 3$, obținem:

$\dfrac{\log_2 48}{\log_6 2} - \dfrac{\log_2 3}{\log_{96} 2} = (4+a)(1+a) - a(5+a) = 4 + 4a + a + a^2 - 5a - a^2 = 4$ **1p**

b) $(3+2\sqrt{2})^{-1} = \dfrac{1}{3+2\sqrt{2}} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{9-8} = 3 - 2\sqrt{2}$ **1p**

Analog $(3-2\sqrt{2})^{-1} = 3+2\sqrt{2}$.

$\log_{3+2\sqrt{2}}(3-2\sqrt{2}) + \log_{3-2\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2}) = \log_{3+2\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2})^{-1} + \log_{3+2\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2})^{-1} = -1 + (-1) = -2$

.... **1p**

c) $a = \lg 75 = \lg(5^2\cdot 3) = \lg 5^2 + \lg 3 = 2\lg 5 + \lg 3$

$b = \lg 45 = \lg 3^2 \cdot 5 = \lg 3^2 + \lg 5 = 2\lg 3 + \lg 5$

.... **1p**

$\lg 15 = \lg 3 + \lg 5 = \dfrac{3\lg 3 + 3\lg 5}{3} = \dfrac{a+b}{3}$ **1p**

Problema 2. Se consideră numărul complex $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$, și $S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n,\ n \in \mathbb{N}$.
a) Demonstrați că $z^2 + z + 1 = 0$.
b) Determinați valorile lui S_5 și S_6.

Miklós József, Târgu Secuiesc

Soluție

Amplificăm z cu conjugata numitorului și obținem $z = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ **2p**

$z^2 = \left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ **1p**

$z^2+z+1=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}+1=-\dfrac{2}{2}+1=0$ **1p**

b) $S_5=1+z+z^2+z^3+z^4+z^5=1+z+z^2+z^3(1+z+z^2)=0+z^3\cdot 0=0$ **2p**

$S_6=1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=1+z\cdot S_5=1+z\cdot 0=1$ **1p**

Problema 3. Arătați că, pentru orice numere reale $x, y>0, x\neq y$ valoarea expresiei

$$E(x,y)=\frac{x-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\frac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{xy}+\sqrt{y}}$$

este constantă.

Nánási Edit, Târgu Secuiesc

Soluție

$E(x,y)=\dfrac{x-y-(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{xy}+\sqrt{y}}$

$E(x,y)=\dfrac{x-y-\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{xy}+\sqrt{y}}$

.... **2p**

$E(x,y)=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{y})-\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{xy}+\sqrt{y}}$ **2p**

$E(x,y)=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{xy}+\sqrt{y})}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\dfrac{2}{\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{xy}+\sqrt{y}}}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot 2=2$ **3p**

Problema 4. În trei magazine se vinde un produs de același fel. În primul magazin se vând m bucăți cu p lei/bucată. În al doilea magazin se vând cu n bucăți mai mult decât în primul magazin la prețul de 40 lei/bucată, iar în al treilea magazin se vând cu n bucăți mai puțin decât în primul magazin la prețul de 60 lei/bucată. Știind că în cele trei magazine se obțin sume egale de bani din vânzare, aflați prețul de vânzare a unei bucăți de produs de la primul magazin.

***

Soluție

Notăm cu M_1, M_2, M_3 cele trei magazine. În M_1 se obțin $m\cdot p$ lei, în M_2 se obțin $(m+n)\cdot 40$ lei, în M_3 se obțin $(m-n)\cdot 60$ lei. Conform enunțului avem că $m\cdot p=(m+n)\cdot 40=(m-n)\cdot 60$.

.... **2p**

$(m+n)\cdot 40=(m-n)\cdot 60\Leftrightarrow 100n=20m\Leftrightarrow 5n=m$ **3p**

$5n\cdot p=(5n-n)\cdot 60\Leftrightarrow 5n\cdot p=240n\Leftrightarrow p=240:5=48$ **2p**