VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
megyei szakasz, 2025. február 1.

XII. osztály

1. feladat (10 pont). Adottak az $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x \text{ és } g(x) = xe^{2-x}$$

függvények. Bizonyítsd be, hogy a $h\colon [0,4] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

függvénynek van primitívje, majd határozd meg a h azon primitívjét, amely átmegy a $\left(3, 4 - \frac{4}{e}\right)$ koordinátájú ponton!

***

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Vizsgáljuk a $\phi\colon [0,4] \to \mathbb{R}, \phi(x) = g(x) - f(x) = xe^{2-x} - x = x(e^{2-x} - 1)$ függvény előjelét.
A ϕ függvény a $[0,2)$ intervallumon pozitív, a $\phi(2) = 0$, és a $(2,4]$ intervallumon negatív. Tehát

$$h(x) = \begin{cases} x & ,\text{ha } x \in [0,2] \\ xe^{2-x} & ,\text{ha } x \in (2,4] \end{cases}.$$

(1 pont)

A h függvény folytonos a $[0,2)$ és a $(2,4]$ intervallumokon, mert elemi függvények összetétele és szorzata. **(1 pont)**

Mivel

$$\lim_{x \nearrow 2} h(x) = \lim_{x \searrow 2} h(x) = h(2) = 2 \Rightarrow$$

h folytonos a 2 -ben is. Tehát h folytonos, ezért van primitívje. **(1 pont)**

Legyen H az h egy primitívje.
Ha $x \in [0,2]$, akkor $H(x) = \frac{x^2}{2} + k_1$, ahol $k_1 \in \mathbb{R}$.
Ha $x \in (2,4]$, akkor $H(x) = -e^{2-x}(x+1) + k_2$, ahol $k_2 \in \mathbb{R}$, mivel

$$\int xe^{2-x}dx = \int x(-e^{2-x})'dx = -xe^{2-x} + \int e^{2-x}dx = -e^{2-x}(x+1) + k_2.$$

(2 pont)

Ahhoz, hogy H az h primitívje legyen, H folytonos és deriválható kell legyen. Következik, hogy

$$\lim_{x \nearrow 2} H(x) = \lim_{x \searrow 2} H(x) = H(2) \Rightarrow 2 + k_1 = -3 + k_2 \Rightarrow k_2 = k_1 + 5 \Rightarrow$$

$$H(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + k & ,\text{ha } x \in [0,2] \\ -e^{2-x}(x+1) + k + 5 & ,\text{ha } x \in (2,4] \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

A szerkesztés alapján a H deriválható a $[0,4]$ intervallumon és $H' = h$. **(2 pont)**

Mivel $H(3) = 4 - \frac{4}{e} \Rightarrow -\frac{4}{e} + k + 5 = 4 - \frac{4}{e} \Rightarrow k = -1$.
Tehát

$$H(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - 1 & ,\text{ha } x \in [0,2] \\ -e^{2-x}(x+1) + 4 & ,\text{ha } x \in (2,4] \end{cases}.$$

(2 pont)

■

2. feladat (10 pont). Adott a

$$\mathbb{Z}[\epsilon] = \{a + b\epsilon \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \text{ halmaz, ahol } \epsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

a) Igazold, hogy $\mathbb{Z}[\epsilon]$ kommutatív monoid a komplex számok szorzási műveletével!

b) Határozd meg a $\mathbb{Z}[\epsilon]$ monoid invertálható elemeit!

c) Legyen $M = \{a^2 - ab + b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Igazold, hogy ha $x, y \in M$, akkor $x \cdot y \in M$!

***

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Először igazoljuk, hogy a $\mathbb{Z}[\epsilon]$ zárt a komplex számok szorzási műveletére nézve.

Legyen $z_1 = a_1 + \epsilon b_1$ és $z_2 = a_2 + \epsilon b_2$ két elem a $\mathbb{Z}[\epsilon]$ halmazból. Ekkor

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + \epsilon b_1) \cdot (a_2 + \epsilon b_2) =$$

$$a_1a_2 + \epsilon^2 b_1b_2 + \epsilon a_1b_2 + \epsilon a_2b_1 = a_1a_2 + (-\epsilon - 1)b_1b_2 + \epsilon a_1b_2 + \epsilon a_2b_1 =$$

$$a_1a_2 - b_1b_2 + \epsilon(a_1b_2 + a_2b_1 - b_1b_2) = a + \epsilon b \in \mathbb{Z}[\epsilon],$$

mert $a = a_1a_2 - b_1b_2 \in \mathbb{Z}$ és $b = a_1b_2 + a_2b_1 - b_1b_2 \in \mathbb{Z}$.

Itt felhasználtuk, hogy $\epsilon^2 + \epsilon + 1 = 0$. **(2 pont)**

Mivel a komplex számok szorzása kommutatív és asszociatív művelet, ezért a $\mathbb{Z}[\epsilon]$-beli elemek szorzása is kommutatív és asszociatív művelet.

$1 = 1 + 0 \cdot \epsilon \in \mathbb{Z}[\epsilon]$ a $\mathbb{Z}[\epsilon]$-beli elemek szorzásának a semleges eleme.

A fentiek alapján kijelenthetjük, hogy $(\mathbb{Z}[\epsilon], \cdot)$ kommutatív monoid. **(1 pont)**

b) Az $x = a + \epsilon \cdot b \in \mathbb{Z}[\epsilon]$ elem akkor invertálható, ha létezik $x' = a' + \epsilon \cdot b' \in \mathbb{Z}[\epsilon]$ úgy, hogy $x \cdot x' = 1$, ami akkor és csak akkor igaz, ha $aa' - bb' + \epsilon(ab' + ba' - b \cdot b') = 1$.

Legyen $\alpha = aa' - bb', \beta = ab' + ba' - bb', \alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\epsilon]$.

$$\alpha + \epsilon\beta = 1 \Leftrightarrow \epsilon\beta = 1 - \alpha.$$

Ha $\beta \neq 0$, akkor $\epsilon = \frac{1-\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$, ami ellentmondás, tehát $\beta = 0$. Innen következik, hogy $\alpha = 1$.

Tehát

$$\begin{cases} aa' - bb' = 1 \\ ba' + ab' - bb' = 0. \end{cases}$$

(1 pont)

Az egyenletrendszer determinánsa

$$\mathbf{d} = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a - b \end{vmatrix} = a^2 - ab + b^2.$$

Ha $d = 0 \Rightarrow a^2 - ab + b^2 = 0 \Rightarrow (a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ és $b = 0 \Rightarrow 0 \cdot a' - 0 \cdot b' = 1$, ami lehetetlen.

Ha $d \neq 0$, akkor

$$a' = \frac{a-b}{a^2-ab+b^2} \text{ és } b' = \frac{b}{a^2-ab+b^2}.$$

Ekkor

$$\begin{cases} a' \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{a-b}{a^2-ab+b^2} \in \mathbb{Z} \\ b' \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{b}{a^2-ab+b^2} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{a}{a^2-ab+b^2} \in \mathbb{Z} \\ \frac{b}{a^2-ab+b^2} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(**1 pont**)

Ha $a = 0 \Rightarrow b = 1$ vagy $b = -1 \Rightarrow x = \epsilon$ vagy $x = -\epsilon$.

Ha $b = 0 \Rightarrow a = 1$ vagy $a = -1 \Rightarrow x = 1$ vagy $x = -1$.

Ha $a \neq 0$ és $b \neq 0$, akkor

$$\frac{a}{a^2-ab+b^2} = \frac{2a}{a^2+(a-b)^2+b^2} \in \mathbb{Z} \text{ és } \frac{b}{a^2-ab+b^2} = \frac{2b}{a^2+(a-b)^2+b^2} \in \mathbb{Z}.$$

Ha $|a| > 2$, akkor

$$a^2+(a-b)^2+b^2 > 2|a| \Rightarrow \frac{2a}{a^2+(a-b)^2+b^2} \notin \mathbb{Z}.$$

(**1 pont**)

Tehát $|a| \leq 2 \Rightarrow a \in \{0, -1, +1, 2, -2\}$.

Hasonlóan $b \in \{0, -1, +1, 2, -2\}$.

Behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}, \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}, \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}, \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}, \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \text{ és } \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

értékek felelnek meg. Tehát a $\mathbb{Z}[\epsilon]$ invertálható elemei a következők: $1, -1, \epsilon, -\epsilon, 1+\epsilon, -1-\epsilon$.

$$1^{-1} = 1, (-1)^{-1} = -1, \epsilon^{-1} = -1-\epsilon, (-\epsilon)^{-1} = 1+\epsilon, (1+\epsilon)^{-1} = -\epsilon, (-1-\epsilon)^{-1} = \epsilon,$$

mely elemek a $\mathbb{Z}[\epsilon]$ halmazban vannak. (**1 pont**)

c)

$$x \in M \Rightarrow x = a_1^2 - a_1b_1 + b_1^2 = (a_1+\epsilon b_1)(a_1+\bar{\epsilon}b_1), \text{ ahol } a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$$

$$y \in M \Rightarrow y = a_2^2 - a_2b_2 + b_2^2 = (a_2+\epsilon b_2)(a_2+\bar{\epsilon}b_2), \text{ ahol } a_2, b_2 \in \mathbb{Z}.$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$xy = (a_1+\epsilon b_1)(a_1+\bar{\epsilon}b_1)(a_2+\epsilon b_2)(a_2+\bar{\epsilon}b_2) =$$

(**1 pont**)

$$(a_1+\epsilon b_1)(a_2+\epsilon b_2)\overline{(a_1+\epsilon b_1)(a_2+\epsilon b_2)} =$$

$$= (m+\epsilon n)(m+\bar{\epsilon}n) = m^2 - mn + n^2 \in M, \text{ ahol } m = a_1a_2 - b_1b_2 \in \mathbb{Z}, n = a_1b_1 + a_2b_1 - b_1b_2 \in \mathbb{Z}.$$

(**1 pont**)

■

3. feladat (10 pont). Tekintsük a Gauss-féle egész számok $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib | a, b \in \mathbb{Z}\}$ halmazát.

a) Igazold, hogy bárhogyan is választunk ki öt elemet a halmazból, van köztük két olyan z_1 és z_2 elem, amelyre $\dfrac{z_1 + z_2}{2} \in \mathbb{Z}[i]$.

b) Igazold, hogy bárhogyan is választunk ki 13 elemet a halmazból, van köztük három olyan z_1, z_2 és z_3 elem, amelyre $\dfrac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \in \mathbb{Z}[i]$.

***

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Vizsgáljuk az öt elem valós és képzetes részének a paritását. Az öt elem közt biztosan van három olyan, amelyek valós részének ugyanaz a paritása. **(2 pont)**

Ezen három elem közül két elem képzetes részének a paritása megegyezik. Erre a két számra igaz, hogy $\frac{z_1+z_2}{2} \in \mathbb{Z}[i]$. **(2 pont)**

b) A $\mathbb{Z}[i]$ halmaz minden eleméhez rendeljük hozzá a

$$(0;0), (0;1), (0;2), (1;0), (1;1), (1;2), (2;0), (2;1), (2;2)$$

számpárok egyikét aszerint, hogy a valós és a képzetes résznek mennyi a 3-mal való osztási maradéka. Például a $z = 13 - 2i$-nek az (1;1) számpár felel meg. Rendezzük ezeket a számpárokat a következő táblázatba:

(0;0)	(0;1)	(0;2)
(1;0)	(1;1)	(1;2)
(2;0)	(2;1)	(2;2)

(2 pont)

Tegyük fel, hogy a 13 elemet elhelyeztük a nekik megfelelő cellákba. Mivel három sor van, a skatulya elv alapján az egyik sorba legalább 5 elem kerül. Két esetet különböztetünk meg:

I. eset. Ha az adott sorban, amelyben az öt elem található, van olyan cella, amelyikbe három elem kerül, akkor ezeknek az elemeknek az átlaga teljesíti a megadott feltételt.

II. eset. Ha az adott sorban, amelyben az öt elem található, mindegyik cellában legfeljebb két elem van, akkor az adott sor mindegyik cellájában van elem, és ezek átlaga fogja teljesíteni a megadott feltételt. **(3 pont)**

■

Megjegyzés. Igazolható, hogy a b) alpont állítása teljesül már 9 tetszőlegesen választott elem esetén is.

4. feladat (10 pont). Adott az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{\sin^2 x}$$

függvény. Legyen $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az f egy olyan primitívje, melyre $F(0) = 0$.

a) Igazold, hogy F bijektív függvény!

b) Számítsd ki a

$$\lim_{n\to\infty}\left[F\left(\frac{1}{1}\right)+F\left(\frac{1}{2}\right)+F\left(\frac{1}{3}\right)+...+F\left(\frac{1}{n}\right)\right] \text{határértéket!}$$

***

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a)

$$F^{'}(x)=f(x)=e^{\sin^2 x}>0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow\ F \text{ szigorúan növekvő} \Rightarrow\ F \text{ injektív.}$$

(1 pont)

Alkalmazzuk Lagrange tételét az F függvényre az $[x,0]$, illetve a $[0,x]$ intervallumon:

$$\text{Bármely } x\neq 0 \text{ esetén létezik } c_x \text{ a 0 és az } x \text{ között úgy, hogy } F^{'}(c_x)=\frac{F(x)-F(0)}{x-0}.$$

Mivel $F^{'}(c_x)=f(c_x)$ és $F(0)=0 \Rightarrow F(x)=x\cdot f(c_x)$. **(2 pont)**

Ugyanakkor mivel $0\leq \sin^2 c_x\leq 1 \Rightarrow 1\leq e^{\sin^2 c_x}\leq e$, ezért

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}xe^{\sin^2 c_x}=-\infty.$$

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}xe^{\sin^2 c_x}=+\infty.$$

Mivel F folytonos, ezért a fentiek alapján következik, hogy F szürjektív. **(1 pont)**

Mivel F injektív és szürjektív, az F függvény bijektív. **(1 pont)**

b) Mivel

$$\text{bármely } x>0 \text{ esetén létezik } c_x\in(0,x) \text{ úgy, hogy } F(x)=x\cdot f(c_x)\Rightarrow$$

$$\text{bármely } k\in\mathbb{N}^* \text{ esetén létezik } c_k\in(0,\frac{1}{k}) \text{ úgy, hogy } F\left(\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k}\cdot f(c_k),$$

tehát

$$F\left(\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k}e^{\sin^2 c_k}$$

(1 pont)

és $0<\sin^2 c_k<\sin^2\frac{1}{k}$, tehát $e^0<e^{\sin^2 c_k}<e^{\sin^2\frac{1}{k}}$. A kapott egyenlőtlenséget beszorozva $\frac{1}{k}$-val felírhatjuk, hogy

$$\frac{1}{k}<\frac{1}{k}e^{\sin^2 c_k}<\frac{1}{k}e^{\sin^2\frac{1}{k}}.$$

(1 pont)

Ha k helyére rendre behelyettesítjük 1-től n-ig a természetes számokat, és összeadjuk az egyenlőtlenségeket, azt kapjuk, hogy:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<\sum_{k=1}^{n}F\left(\frac{1}{k}\right)\Rightarrow$$

(**1 pont**)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < F\left(\frac{1}{1}\right) + F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right) + ... + F\left(\frac{1}{n}\right)$$

Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[F\left(\frac{1}{1}\right) + F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right) + ... + F\left(\frac{1}{n}\right)\right] = +\infty.$$

(**1 pont**)

■