VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
megyei szakasz, 2025. február 1.

XII. osztály

1. feladat. Adottak az $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x \text{ és } g(x) = xe^{2-x}$$

függvények. Bizonyítsd be, hogy a $h\colon [0,4] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

függvénynek van primitívje, majd határozd meg a h azon primitívjét, amely átmegy a $\left(3, 4-\frac{4}{e}\right)$ koordinátájú ponton!

2. feladat. Adott a

$$\mathbb{Z}[\epsilon] = \{a + b\epsilon \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \text{ halmaz, ahol } \epsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

a) Igazold, hogy $\mathbb{Z}[\epsilon]$ kommutatív monoid a komplex számok szorzási műveletével!

b) Határozd meg a $\mathbb{Z}[\epsilon]$ monoid invertálható elemeit!

c) Legyen $M = \{a^2 - ab + b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Igazold, hogy ha $x, y \in M$, akkor $x \cdot y \in M$!

3. feladat. Tekintsük a Gauss-féle egész számok $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib | a, b \in \mathbb{Z}\}$ halmazát.

a) Igazold, hogy bárhogyan is választunk ki öt elemet a halmazból, van köztük két olyan z_1 és z_2 elem, amelyre $\frac{z_1 + z_2}{2} \in \mathbb{Z}[i]$.

b) Igazold, hogy bárhogyan is választunk ki 13 elemet a halmazból, van köztük három olyan z_1, z_2 és z_3 elem, amelyre $\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \in \mathbb{Z}[i]$.

4. feladat. Adott az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{\sin^2 x}$$

függvény. Legyen $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az f egy olyan primitívje, melyre $F(0) = 0$.

a) Igazold, hogy F bijektív függvény!

b) Számítsd ki a

$$\lim_{n\to\infty} \left[F\left(\frac{1}{1}\right) + F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right) + \ldots + F\left(\frac{1}{n}\right)\right] \text{ határértéket!}$$

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.