VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
megyei szakasz, 2025. február 1.

XI. osztály

1. feladat (10 pont). Adott az $(a_n)_{n\geq 0}$ számsorozat, amelyre

$$a_0 = 1 \quad \text{és} \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_n a_{n+1},$$

bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

a) Határozd meg az $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ értékét!

b) Határozd meg a sorozat általános tagját! Bizonyítsd is be a kapott eredményt!

Jakab Tibor, Sepsiszentgyörgy, Matlap 8/L:3780

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) A rekurzió alapján: $a_0 = a_0 a_1$, ahonnan $1 = 1 \cdot a_1$, tehát $a_1 = 1$ **(1 pont)**

$a_0 + a_1 = a_1 a_2 \Rightarrow 1 + 1 = a_2 \Rightarrow a_2 = 2$
$a_0 + a_1 + a_2 = a_2 a_3 \Rightarrow 1 + 1 + 2 = 2a_3 \Rightarrow a_3 = 2$
$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = a_3 a_4 \Rightarrow 1 + 1 + 2 + 2 = 2a_4 \Rightarrow a_4 = 3$
$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_4 a_5 \Rightarrow 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 3a_5 \Rightarrow a_5 = 3$
$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_5 a_6 \Rightarrow 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 = 3a_6 \Rightarrow a_6 = 4$
$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = a_6 a_7 \Rightarrow 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 = 4a_7 \Rightarrow a_7 = 4$
$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = a_7 a_8 \Rightarrow 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 = 4a_8 \Rightarrow a_8 = 5$
$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = a_8 a_9 \Rightarrow 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 = 5a_9 \Rightarrow a_9 = 5$
$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = a_9 a_{10} \Rightarrow 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 = 5a_{10} \Rightarrow a_{10} = 6$

(3 pont)

b) Az előző alpont alapján azt sejtjük, hogy $a_{2k} = a_{2k+1} = k + 1$. Ezt a matematikai indukcióval bizonyítjuk. Feltételezzük, hogy a tulajdonság igaz k-ig, azaz $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = 2$, ... , $a_{2k} = a_{2k+1} = k + 1$ és bizonyítjuk $k + 1$ esetén, azaz, hogy $a_{2k+2} = a_{2k+3} = k + 2$. Az előző alpont alapján a tulajdonság igaz 0, 1, 2, 3, 4 esetén. **(2 pont)**

A rekurzió alapján

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2k} + a_{2k+1} = a_{2k+1} \cdot a_{2k+2},$$

azaz

$$1 + 1 + 2 + 2 + \cdots + (k + 1) + (k + 1) = (k + 1) \cdot a_{2k+2}.$$

Tehát

$$2 \cdot \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} = (k + 1) \cdot a_{2k+2} \Rightarrow a_{2k+2} = k + 2.$$

Hasonlóan

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2k} + a_{2k+1} + a_{2k+2} = a_{2k+2} \cdot a_{2k+3},$$

azaz

$$1 + 1 + 2 + 2 + \cdots + (k+1) + (k+1) + (k+2) = (k+2) \cdot a_{2k+3},$$

ahonnan

$$2 \cdot \frac{(k+1)(k+2)}{2} + (k+2) = (k+2) \cdot a_{2k+3} \Rightarrow a_{2k+3} = k + 1 + 1 = k + 2.$$

Tehát bebizonyítottuk, hogy $a_{2k+2} = a_{2k+3} = k + 2$.

A matematikai indukció elve alapján következik, hogy $a_{2k} = a_{2k+1} = k + 1$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. (**3 pont**)

■

Megjegyzés. Az általános tag képlete írható $a_n = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ alakban is.

Második megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) A rekurzió alapján: $a_0 = a_0 a_1$, ahonnan $1 = 1 \cdot a_1$, tehát $a_1 = 1$ (**1 pont**)

Átalakítjuk az adott összefüggést:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_n a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{a_n}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{a_n} = \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}}{a_n} + 1 = \underbrace{\frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}}{a_{n-1}}}_{a_n} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} + 1.$$

Ebből következik, hogy:

$$a_{n+1} = a_{n-1} + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(**2 pont**)

Tehát:

$$a_2 = a_0 + 1 = 2, \quad a_3 = a_1 + 1 = 2, \quad a_4 = a_2 + 1 = 3, \quad a_5 = a_3 + 1 = 3,$$
$$a_6 = a_4 + 1 = 4, \quad a_7 = a_5 + 1 = 4, \quad a_8 = a_6 + 1 = 5, \quad a_9 = a_7 + 1 = 5, \quad a_{10} = a_8 + 1 = 6.$$

(**1 pont**)

b) Az előző alpontban kiszámított tagok alapján sejtjük, hogy

$$a_n = \left[\frac{n}{2}\right] + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A $P(n) : a_n = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ állítást a matematikai indukció módszerével igazoljuk.

Ellenőrizzük a $P(0)$ és $P(1)$ kijelentéseket:

$$P(0) : a_0 = \left[\frac{0}{2}\right] + 1 = 1 \quad \text{és} \quad P(1) : a_1 = \left[\frac{1}{2}\right] + 1 = 1 \quad \text{igazak.}$$ (**2 pont**)

Feltételezzük, hogy $P(k) : a_k = \left[\frac{k}{2}\right] + 1$ és $P(k+1) : a_{k+1} = \left[\frac{k+1}{2}\right] + 1$ igaz és igazoljuk, hogy $P(k+2) : a_{k+2} = \left[\frac{k+2}{2}\right] + 1$ is igaz.

De mivel $a_{k+2} = a_k + 1$, kapjuk, hogy:

$$a_{k+2} = \left[\frac{k}{2}\right] + 1 + 1 = \left[\frac{k+2}{2}\right] + 1.$$

Tehát a matematikai indukció elve alapján:

$$a_n = \left[\frac{n}{2}\right] + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$ (**3 pont**)

■

2. feladat (10 pont). a) Adj példát olyan $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixra, amelyre $A^2 + I_2 = O_2$.

b) Igazold, hogy végtelen sok olyan $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix létezik, amelyre $A^2 + I_2 = O_2$.

c) Igazold, hogy végtelen sok olyan $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ invertálható mátrixokból álló páros létezik, amelyre

$$B^2 \neq I_2,\ C^2 \neq I_2 \quad \text{és} \quad B^2 + C^2 = O_2.$$

Csapó Hajnalka, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) Olyan mátrixot kell találnunk, amely teljesíti az $A^2 = -I_2$ egyenlőséget.

Egy lehetséges példa:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ellenőrzés:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2,$$

így $A^2 + I_2 = O_2$.

Tehát a feltétel teljesül. (**2 pont**)

b) Legyen az A mátrix általános alakja

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

Ekkor, felhasználva az $A^2 + I_2 = O_2$ feltételt,

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\begin{cases} a^2 + bc = -1, \\ b(a+d) = 0, \\ c(a+d) = 0, \\ d^2 + bc = -1. \end{cases}$$

Ha $b(a+d) = 0$ (vagy $c(a+d) = 0$), a megoldás során két esetet különböztetünk meg:

i) $b = 0$, de ekkor $a^2 = -1$ és $d^2 = -1$, tehát $A \notin \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

ii) $a + d = 0 \Rightarrow a = -d$, tehát
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Hasonlóan kapjuk a $c(a+d) = 0$ esetben is. Vagyis az egyenletrendszer megoldása az $a = -d$ feltétel mellett mindazokat a számokat tartalmazza, melyekre fennáll az $a^2 + bc = -1$ feltétel, azaz $bc = -a^2 - 1$. **(2 pont)**

Egy ilyen mátrix lehetséges alakja:
$$A = \begin{pmatrix} a & a^2+1 \\ -1 & -a \end{pmatrix}.$$

Ekkor
$$A^2 = \begin{pmatrix} a & a^2+1 \\ -1 & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & a^2+1 \\ -1 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - a^2 - 1 & a^3 + a - a^3 - a \\ -a + a & -a^2 - 1 + a^2 \end{pmatrix} = -I_2$$

Tehát $A^2 + I_2 = O_2$ bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén, így végtelen sok ilyen mátrix van, mert minden $a \in \mathbb{R}$ értékre más-más mátrixot kapunk. **(2 pont)**

Megjegyzés. Egy másik lehetőség, ha használjuk a Cayley Hamilton összefüggést:

$$A^2 - \mathrm{Tr}A \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2.$$

Az $A^2 + I_2 = O_2$ igaz minden olyan $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixra, amelyre $\mathrm{Tr}A = 0$ és $\det A = 1$.

Tehát, ha
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$
és $\det A = 1$, akkor ez az A teljesíti a feltételt.

A $\det A = -a^2 + bc = 1$ egyenlőség ugyanahhoz a $bc = -a^2 - 1$ összefüggéshez vezet.

c) Legyen $A = \begin{pmatrix} a & a^2+1 \\ -1 & -a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

Ekkor $A^2 + I_2 = O_2$. Ha $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ egy olyan mátrix, amelyre $C^2 \neq I_2$ és $AC = CA$, akkor az előbbi egyenlőséget a C^2 mátrixszal beszorozva, kapjuk:

$$A^2C^2 + C^2 = O_2.$$

Ekkor $A^2C^2 = AACC = ACAC = (AC)^2$, tehát, ha $B = AC$ invertálható és $B^2 \neq I_2$, akkor ez teljesíti a feltételt. **(1 pont)**

Ha létezik ilyen C, akkor $\det(AC) = \det A \det C \neq 0$, mert A és C invertálható.

Szerkesszünk ilyen C mátrixot.

Legyen $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, Ekkor

$$AC = \begin{pmatrix} a & a^2+1 \\ -1 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + a^2z + z & ay + a^2t + t \\ -x - az & -y - at \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a^2+1 \\ -1 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - y & a^2x + x - ay \\ az - t & a^2z + z - at \end{pmatrix}$$

(**1 pont**)

Úgy kell megválasszuk az x, y, z, t értékét, hogy $AC = CA$ legyen, tehát

$$\begin{cases} ax + a^2z + z = ax - y, \\ ay + a^2t + t = a^2x + x - ay, \\ -x - az = az - t, \\ -y - at = a^2z + z - at. \end{cases}$$

Azaz

$$\begin{cases} y = -z(a^2+1), \\ (t-x)(a^2+1) = -2ay, \\ t - x = 2az, \\ y = -z(a^2+1). \end{cases}$$

Legyen $z = -1$, ekkor $y = a^2 + 1$ és $t - x = -2a$, utóbbiakat válasszuk úgy, hogy $t = 0$ és $x = 2a$.

Ekkor $C = \begin{pmatrix} 2a & a^2+1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det C = a^2 + 1 \neq 0$, tehát invertálható.

$C^2 = \begin{pmatrix} 2a & a^2+1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a & a^2+1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a^2-1 & 2a^3+2a \\ -2a & -a^2-1 \end{pmatrix} \neq I_2, \forall a \in \mathbb{R}$. Nem kell ellenőrizzük, hogy $AC = CA$, mert úgy választottuk a C-t, hogy ez teljesüljön.

$$B = AC = \begin{pmatrix} a & a^2+1 \\ -1 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a & a^2+1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-1 & a^3+a \\ -a & -a^2-1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} a^2-1 & a^3+a \\ -a & -a^2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2-1 & a^3+a \\ -a & -a^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a^2+1 & -2a^3-2a \\ 2a & a^2+1 \end{pmatrix} \neq I_2, \forall a \in \mathbb{R}^*.$$

Tehát a B és C teljesíti a feltételeket bármely $a \in \mathbb{R}^*$ esetén. (**1 pont**)

Megjegyzés. Ha nincs meg a szerkesztés, csak meg van adva B és C alakja és be van bizonyítva, hogy teljesíti a feltételeket, akkor jár a **3 pont.**

■

Második megoldás a c) alpontra. A b) alpontban bemutatott számoláshoz hasonlóan kapjuk, hogy a

$$B^2 + n^2 I_2 = O_2$$

mátrixegyenletnek a

$$B = \begin{pmatrix} a & a^2 + n^2 \\ -1 & -a \end{pmatrix}$$

mátrix megoldása minden $a \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq 2$ esetén. Az egyszerűség kedvéért választhatunk $a = 0$-t.
Másrészt, ha $C = nI_2$, akkor $C^2 = n^2 I_2$. Innek következik, hogy minden $n \geq 2$ esetén a

$$B = \begin{pmatrix} 0 & n^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad C = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

mátrixok invertálhatóak, négyzetük nem egyenlő I_2-vel, illetve teljesítik a $B^2 + C^2 = O_2$ összefüggést. ■

3. feladat (10 pont). Adott az $(x_n)_{n\geq 1}$ pozitív tagú sorozat, amelyre

$$x_1 = 3 \quad \text{és} \quad 3x_{n+1}^2 \cdot x_n = 6 + x_n^3, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Igazold, hogy az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens, majd határozd meg a határértékét!

b) Számítsd ki a

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \cdot x_n^3 - 3n\right)$$

határértéket!

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Mivel a sorozat pozitív tagú ezért alulról korlátos. **(1 pont)**
Átalakítjuk az adott összefüggést:

$$x_{n+1}^2 = \frac{6 + x_n^3}{3x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Felhasználva a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$x_{n+1}^2 = \frac{3 + 3 + x_n^3}{3x_n} \geq \frac{\sqrt[3]{3 \cdot 3 \cdot x_n^3}}{x_n} = \frac{\sqrt[3]{9} \cdot x_n}{x_n} = \sqrt[3]{9}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tehát

$$x_{n+1}^2 \geq \sqrt[3]{9}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

mivel $x_n > 0$ bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, kapjuk, hogy

$$x_n \geq \sqrt[3]{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Vizsgáljuk a monotonitást:

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 = \frac{6 + x_n^3}{3x_n} - x_n^2 = \frac{6 - 2x_n^3}{3x_n} = \frac{2(3 - x_n^3)}{3x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Mivel

$$x_n \geq \sqrt[3]{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

következik, hogy

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n) \leq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

az $(x_n)_{n\geq 1}$ pozitív tagú sorozat tehát $x_{n+1} + x_n > 0 \Rightarrow x_{n+1} - x_n \leq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, tehát a sorozat csökkenő. **(2 pont)**

A sorozat csökkenő és alulról korlátos, tehát konvergens és létezik

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

(1 pont)

Legyen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, határértékre térve a rekurzív összefüggésben kapjuk, hogy

$$3l^3 = 6 + l^3 \Rightarrow l^3 = 3 \Rightarrow l = \sqrt[3]{3}$$

Tehát

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{3}.$$

(1 pont)

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot x_n^3 - 3n\right) \overset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot(x_n^3-3)\right) \overset{[\infty\cdot 0]}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\dfrac{1}{x_n^3-3}} \overset{CS}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\dfrac{1}{x_{n+1}^3-3} - \dfrac{1}{x_n^3-3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(x_{n+1}^3-3)(x_n^3-3)}{x_n^3-x_{n+1}^3} =$$

(1 pont)

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(x_{n+1}-\sqrt[3]{3}\right)\left(x_{n+1}^2 + x_{n+1}\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3^2}\right)\left(x_n - \sqrt[3]{3}\right)\left(x_n^2 + x_n\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3^2}\right)}{\left(x_n - x_{n+1}\right)\left(x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_n + x_n^2\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(x_{n+1}^2 + x_{n+1}\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3^2}\right)\left(x_n^2 + x_n\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3^2}\right)}{\left(x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_n + x_n^2\right)} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{\left(x_{n+1}-\sqrt[3]{3}\right)\left(x_n-\sqrt[3]{3}\right)}{x_n - x_{n+1}} =$$

$$= \frac{3\cdot\sqrt[3]{9}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{9}}{3\cdot\sqrt[3]{9}} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{\left(x_{n+1}-\sqrt[3]{3}\right)\left(x_n-\sqrt[3]{3}\right)\left(x_n+x_{n+1}\right)}{x_n^2 - x_{n+1}^2} =$$

$$= 3\cdot\sqrt[3]{9}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(x_{n+1}-\sqrt[3]{3}\right)\left(x_n-\sqrt[3]{3}\right)\left(x_n+x_{n+1}\right)}{\dfrac{2\left(x_n^3-3\right)}{3x_n}} =$$

(1 pont)

$$= 3\cdot\sqrt[3]{9}\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(x_{n+1}-\sqrt[3]{3}\right)\left(x_n-\sqrt[3]{3}\right)\left(x_n+x_{n+1}\right)x_n}{2\left(x_n-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{3^2}+x_n\sqrt[3]{3}+x_n^2\right)}.$$

$$= 3 \cdot \sqrt[3]{9} \lim_{n\to\infty} \frac{3\left(x_{n+1} - \sqrt[3]{3}\right)\left(x_n + x_{n+1}\right)x_n}{2\left(\sqrt[3]{3^2} + x_n\sqrt[3]{3} + x_n^2\right)} = 3 \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \frac{3 \cdot 0 \cdot 2\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3}}{2 \cdot 3\sqrt[3]{9}} = 0.$$

(1 pont)

■

4. feladat (10 pont). Egy $n \times 5$-ös téglalapot 1×5-ös téglalapokkal födünk le. Jelölje a_n a lefödések számát.

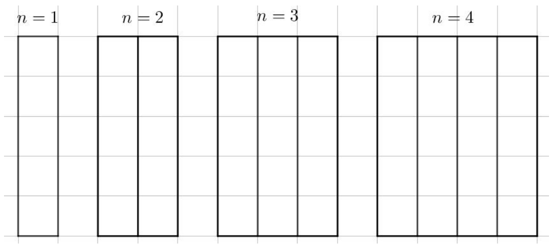
a) Szerkeszd meg az összes lehetséges lefödést, ha $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

b) Vezess le egy rekurziót az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatra!

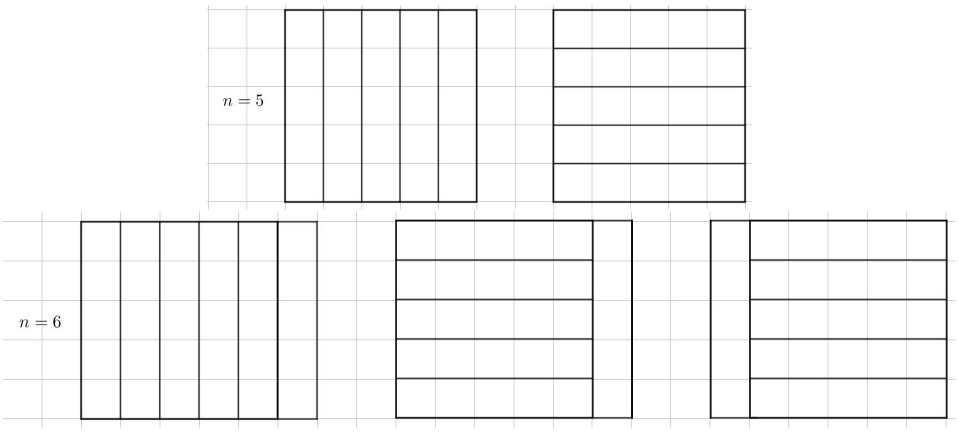
c) Határozd meg az $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2025}\}$ halmazban az 5-tel osztható számok számát!

Csapó Hajnalka, Csíkszereda

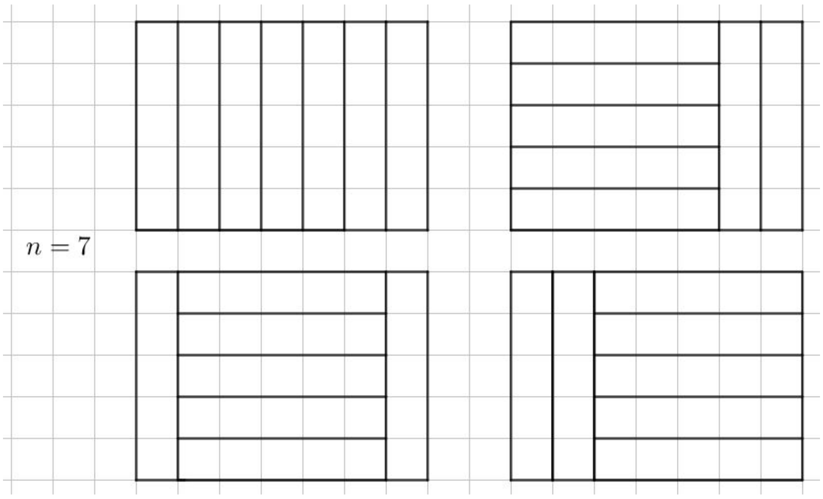
Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



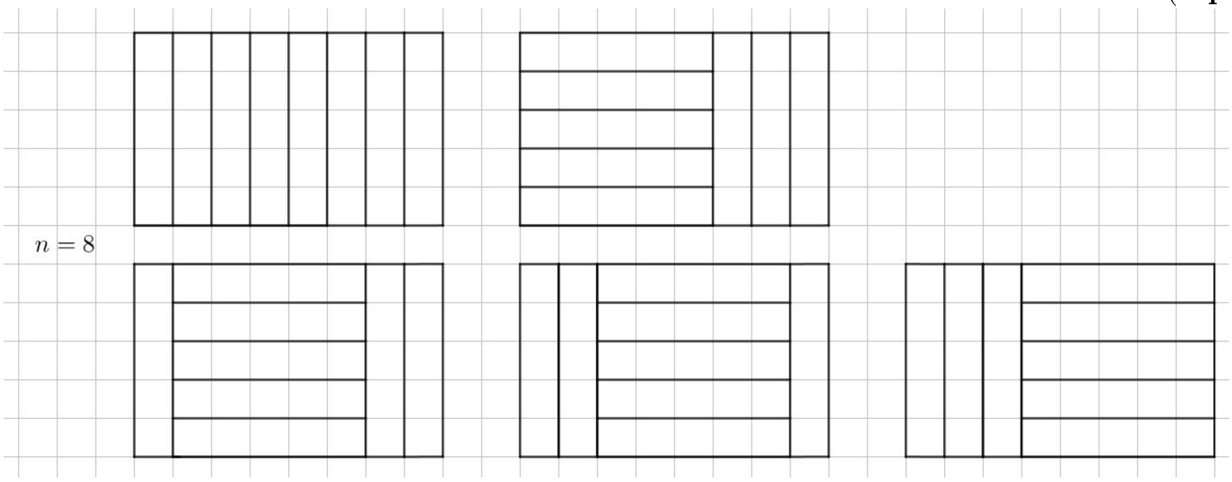
a) **(1 pont)**



(1 pont)

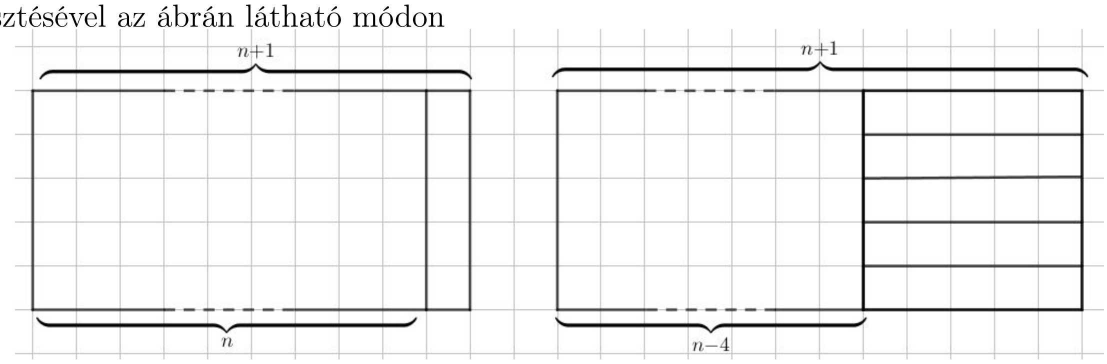


(1 pont)



(1 pont)

b) Ha $n \geq 5$, akkor egy $5 \times (n+1)$-es téglalapot megkaphatunk egy $5 \times n$-esből egy függőleges 5×1-es táglalap hozzáillesztésével vagy egy $5 \times (n-4)$-esből 5 darab 1×5-ös vízszintes téglalap hozzáillesztésével az ábrán látható módon



(2 pont)

Az elsőből a_n darab van és a másodikból a_{n-4}, tehát a rekurzió $a_{n+1} = a_n + a_{n-4}$. **(1 pont)**

c) Az $a_{n+1} = a_n + a_{n-4}$ rekurzióból következik, hogy ha $n \geq 5$, akkor a sorozat szigorúan növekvő, így az $\{a_5, a_6, \ldots, a_{2025}\}$ halmazban nincsenek ismétlődő elemek.

Az a) és b) alpontok alapján az 5-tel való osztási maradékok:

$$\underline{\mathbf{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 0,\ 1,}}\ \mathbf{3,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,} 1, 1, 1, 1, 2, 3, \ldots$$

Az 5-tel való maradékok periódusa 24 (a négy darab nullás után öt darab egyes következik), az $a_{24k+1}, \ldots, a_{24k+24}$ sorozatban 10 szám osztható 5-tel.

(**1 pont**)

$2025 = 84 \cdot 24 + 9$, így 841 szám osztható 5-tel az első 2025 tag között. (**1 pont**)

■