VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
megyei szakasz, 2025. február 1.

XI. osztály

1. feladat. Adott az $(a_n)_{n\geq 0}$ számsorozat, amelyre

$$a_0 = 1 \quad \text{és} \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_n a_{n+1},$$

bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

a) Határozd meg az $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ értékét!

b) Határozd meg a sorozat általános tagját! Bizonyítsd is be a kapott eredményt!

2. feladat. a) Adj példát olyan $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixra, amelyre $A^2 + I_2 = O_2$.

b) Igazold, hogy végtelen sok olyan $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix létezik, amelyre $A^2 + I_2 = O_2$.

c) Igazold, hogy végtelen sok olyan $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ invertálható mátrixokból álló páros létezik, amelyre

$$B^2 \neq I_2,\ C^2 \neq I_2 \quad \text{és} \quad B^2 + C^2 = O_2.$$

3. feladat. Adott az $(x_n)_{n\geq 1}$ pozitív tagú sorozat, amelyre

$$x_1 = 3 \quad \text{és} \quad 3x_{n+1}^2 \cdot x_n = 6 + x_n^3, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Igazold, hogy az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens, majd határozd meg a határértékét!

b) Számítsd ki a

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \cdot x_n^3 - 3n\right)$$

határértéket!

4. feladat. Egy $n \times 5$-ös téglalapot 1×5-ös téglalapokkal födünk le. Jelölje a_n a lefödések számát.

a) Szerkeszd meg az összes lehetséges lefödést, ha $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

b) Vezess le egy rekurziót az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatra!

c) Határozd meg az $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2025}\}$ halmazban az 5-tel osztható számok számát!

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.