VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
megyei szakasz, 2025. február 1.

X. osztály

1. feladat (10 pont). a) Igazold, hogy ha az $az^2 + bz + c = 0$ egyenlet $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ együtthatóira fennál a $|b| \geq 2|c|$ egyenlőtlenség, akkor az egyenletnek létezik legalább egy olyan gyöke, amelynek a modulusa kisebb vagy egyenlő mint 1!

b) Határozd meg a $z \in \mathbb{C}$ lehetséges értékeit úgy, hogy teljesüljön a

$$\max\{|z-1|, |z-\varepsilon|, |z-\varepsilon^2|\} \leq 1$$

egyenlőtlenség, ha $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ harmadrendű egységgyökök!

Matlap 2024/8,L3776

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Legyen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ az egyenlet két gyöke. A Viète összefüggések alapján

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{és} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $c \neq 0$ ezért $z_1, z_2 \neq 0$. Továbbá $\frac{|b|}{|c|} \geq 2$. A felírt egyenletek alapján

$$2 \leq \frac{|b|}{|c|} = \frac{|-a(z_1+z_2)|}{|az_1z_2|} = \left|\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}\right| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right|. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Alkalmazva a háromszögegyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right| \leq \left|\frac{1}{z_1}\right| + \left|\frac{1}{z_2}\right|. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A fenti két egyenlőtlenség alapján

$$2 \leq \left|\frac{1}{z_1}\right| + \left|\frac{1}{z_2}\right|. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ha $|z_1| > 1$ és $|z_2| > 1$, akkor

$$\left|\frac{1}{z_1}\right| + \left|\frac{1}{z_2}\right| < 1 + 1 = 2,$$

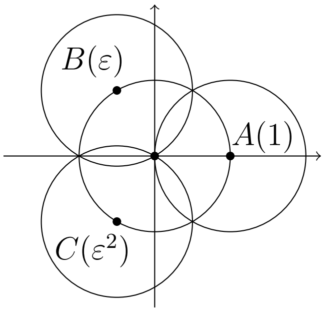
ami ellentmondás. Tehát $|z_1| \leq 1$ vagy $|z_2| \leq 1$. **(1 pont)**

b) Legyen A, B, C, D pontok a síkban, melyek affixumai rendre $1, \varepsilon, \varepsilon^2, z$; ahol $z \in \mathbb{C}$ tetszőleges. A $\max\{|z-1|, |z-\varepsilon|, |z-\varepsilon^2|\} \leq 1$ egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül ha $|z-1| \leq 1$ és $|z-\varepsilon| \leq 1$ és $|z-\varepsilon^2| \leq 1$. **(1 pont)**

Írhatjuk a következő ekvivalenciákat

$$\begin{aligned}
|z-1| \leq 1 &\iff D \in \operatorname{int}\mathcal{C}(A,1) \cup \mathcal{C}(A,1),\\
|z-\varepsilon| \leq 1 &\iff D \in \operatorname{int}\mathcal{C}(B,1) \cup \mathcal{C}(B,1),\\
|z-\varepsilon^2| \leq 1 &\iff D \in \operatorname{int}\mathcal{C}(C,1) \cup \mathcal{C}(C,1).
\end{aligned}$$

A három körlap metszete csak az origó lehet, figyelembe véve, hogy a középpontjaik az egység sugarú origó középpontú körön vannak. Tehát $D = O$ vagyis $z = 0$. **(1 pont)**



■

2. feladat (10 pont). Adottak az $1 < a < b$ valós számok.

a) Igazold, hogy $(a+b)x - ab \geq x^2$, minden $x \in [a,b]$ esetén.

b) Adottak az $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$ valós számok, ahol $n \geq 2$. Igazold a következő egyenlőtlenséget:

$$\log_{x_1}((a+b)x_2 - ab) + \log_{x_2}((a+b)x_3 - ab) + \ldots + \log_{x_{n-1}}((a+b)x_n - ab) + \log_{x_n}((a+b)x_1 - ab) \geq 2n.$$

***

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) $x \in [a,b]$ pontosan akkor ha $(x-a)(x-b) \leq 0$. **(1 pont)**

A szorzást elvégezve átírható $x^2 - (a+b)x + ab \leq 0$ alakba, ami egyenértékű az $x^2 \leq (a+b)x - ab$ egyenlőtlenséggel. **(1 pont)**

b) Az írásmód egyszerűsítése érdekében legyen $x_{n+1} = x_1$ és az egyenlőtlenség bal oldalát jelöljük S-sel. Mivel $x_k \in [a,b]$ minden $k = \overline{1,n}$ esetén, ezért az előző alpont alapján teljesül, hogy $(a+b)x_k - ab \geq x_k^2$. **(2 pont)**

Továbbá a $\log_{x_k} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ egy növekvő függvény mert $x_k \geq a > 1$. **(1 pont)**

Tehát $\log_{x_k}((a+b)x_{k+1} - ab) \geq \log_{x_{k+1}} x_k^2$, minden $k = \overline{1,n}$ esetén. **(1 pont)**

Összegezve ezt az n darab egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$S \geq \log_{x_1} x_2^2 + \log_{x_2} x_3^2 + \ldots + \log_{x_{n-1}} x_n^2 + \log_{x_n} x_1^2,$$
$$S \geq 2(\log_{x_1} x_2 + \log_{x_2} x_3 + \ldots + \log_{x_{n-1}} x_n + \log_{x_n} x_1).$$

(1 pont)

A jobb oldalon az összeg minden tagja pozitív mert $x_k > 1$. Így alkalmazható a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség és írhatjuk, hogy

$$S \geq 2n \sqrt[n]{\log_{x_1} x_2 \log_{x_2} x_3 \cdot \ldots \cdot \log_{x_{n-1}} x_n \log_{x_n} x_1},$$
$$S \geq 2n \sqrt[n]{\frac{\lg x_2}{\lg x_1} \frac{\lg x_3}{\lg x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{\lg x_n}{\lg x_{n-1}} \frac{\lg x_1}{\lg x_n}} = 2n.$$ **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont). Tanulmányozd az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény injektívitását, amely teljesíti a

$$2f(x)^2 + 5f(x) + 2 = f(2x^2 - 10x + 5)$$

összefüggést minden $x \in \mathbb{R}$ esetén!

***

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Megvizsgáljuk milyen x értékekre lesz $2x^2 - 10x + 5$ egyenlő x-el.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 10x + 5 =& x, \\ 2x^2 - 11x + 5 =& 0, \\ (2x-1)(x-5) =& 0. \end{aligned}$$

Vagyis $x \in \left\{\frac{1}{2}, 5\right\}$ esetén $2x^2 - 10x + 5 = x$. **(4 pont)**

Ha $x \in \left\{\frac{1}{2}, 5\right\}$, akkor $2f(x)^2 + 5f(x) + 2 = f(x)$, vagyis $2(f(x)+1)^2 = 0$. Tehát $f(x) = -1$.**(3 pont)**

Következésképpen $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(5) = -1$, ahonnan f nem injektív. **(2 pont)**

■

4. feladat (10 pont). Bizonyítsd be, hogy 10 különböző rácspont közül mindig kiválasztható kettő úgy, hogy az általuk meghatározott szakasz harmadolópontjai is rácspontok legyenek! (Rácspontnak nevezzük azokat a pontokat, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám.)

***

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Ha $z_1 = x_1 + iy_1$ és $z_2 = x_2 + iy_2$ két rácspontnak az affixuma, akkor a harmadolópontok affixuma $h_1 = \frac{1}{3}(2z_1 + z_2)$, illetve $h_1 = \frac{1}{3}(z_1 + 2z_2)$. Emiatt pontosan akkor lesznek a harmadolópontok is rácspontok, ha x_1 és x_2, illetve y_1 és y_2 azonos maradékot ad a 3-mal való osztásnál. **(4 pont)**

Hozzuk létre az $D_{u,v} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | (x-u)$ és $(y-v)$ osztható 3-mal$\}$ halmazokat minden $u, v \in \{0,1,2\}$ esetén. Ez a 9 halmaz valójában azt jelenti, hogy két pont pontosan akkor van ugyanabban a halmazban, ha a megfelelő koordinátáiknak a 3-mal való osztási maradéka azonos. **(4 pont)**

Mivel tíz szám van és 9 halmaz, ezért a skatulyaelv alapján valamelyik halmazban van két pont a tízből és így az előbbi tulajdonság alapján az ezek által meghatározott szakasz harmadolópontjai is rácspontok. **(1 pont)**

■