MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
megyei szakasz, 2025. február 1.

X. osztály

1. feladat. a) Igazold, hogy ha az $az^2 + bz + c = 0$ egyenlet $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ együtthatóira fennál a $|b| \geq 2|c|$ egyenlőtlenség, akkor az egyenletnek létezik legalább egy olyan gyöke, amelynek a modulusa kisebb vagy egyenlő mint 1!

b) Határozd meg a $z \in \mathbb{C}$ lehetséges értékeit úgy, hogy teljesüljön a

$$\max\{|z-1|, |z-\varepsilon|, |z-\varepsilon^2|\} \leq 1$$

egyenlőtlenség, ha $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ harmadrendű egységgyökök!

2. feladat. Adottak az $1 < a < b$ valós számok.

a) Igazold, hogy $(a+b)x - ab \geq x^2$, minden $x \in [a, b]$ esetén.

b) Adottak az $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$ valós számok, ahol $n \geq 2$. Igazold a következő egyenlőtlenséget:

$$\log_{x_1}((a+b)x_2 - ab) + \log_{x_2}((a+b)x_3 - ab) + \ldots + \log_{x_{n-1}}((a+b)x_n - ab) + \log_{x_n}((a+b)x_1 - ab) \geq 2n.$$

3. feladat. Tanulmányozd az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény injektívitását, amely teljesíti a

$$2f(x)^2 + 5f(x) + 2 = f(2x^2 - 10x + 5)$$

összefüggést minden $x \in \mathbb{R}$ esetén!

4. feladat. Bizonyítsd be, hogy 10 különböző rácspont közül mindig kiválasztható kettő úgy, hogy az általuk meghatározott szakasz harmadolópontjai is rácspontok legyenek! (Rácspontnak nevezzük azokat a pontokat, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám.)

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.