VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
megyei szakasz, 2025. február 1.

IX. osztály

1. feladat (10 pont). Ha x, y, z, t szigorúan pozitív valós számok, akkor igazold az alábbi egyenlőtlenségeket:

a) $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zt} + \sqrt{tx} \leq x + y + z + t$,

b) $\dfrac{1}{x+y+z} \leq \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)$,

c) $\dfrac{1}{x+y+\sqrt{zt}} + \dfrac{1}{y+z+\sqrt{tx}} + \dfrac{1}{z+t+\sqrt{xy}} + \dfrac{1}{t+x+\sqrt{yz}} \leq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{t}\right)$.

Szilágyi Judit, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) A mértani és számtani középarányosok közti egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \quad \sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2}, \quad \sqrt{zt} \leq \frac{z+t}{2} \quad \text{és} \quad \sqrt{tx} \leq \frac{t+x}{2}.$$

Összeadva a fenti egyenlőtlenségeket kapjuk, hogy

$$\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zt} + \sqrt{tx} \leq x + y + z + t.$$ **(3 pont)**

b) Az $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ pozitív számokra alkalmazzuk a számtani és harmonikus közepek közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{3} \geq \frac{3}{x+y+z},$$

ezt végigosztva 3-mal következik, hogy $\frac{1}{x+y+z} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$. **(3 pont)**

c) A b) alpont alapján

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{x+y+\sqrt{zt}} + \frac{1}{y+z+\sqrt{tx}} + \frac{1}{z+t+\sqrt{xy}} + \frac{1}{t+a+\sqrt{yz}} \\ &\leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{\sqrt{zt}} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{\sqrt{tx}} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{t} + \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{yz}}\right) \\ &= \frac{1}{9}\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zt}} + \frac{1}{\sqrt{tx}}\right). \end{aligned}$$

Az a) alpont szerint

$$\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zt}} + \frac{1}{\sqrt{tx}} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}.$$

A fentiek alapján az következik, hogy

$$\begin{aligned} S &\leq \frac{1}{9}\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right) \\ &= \frac{1}{9}\left(\frac{3}{x}+\frac{3}{y}+\frac{3}{z}+\frac{3}{t}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right). \end{aligned}$$

(3 pont)

■

2. feladat (10 pont). Ha $x \in \mathbb{R}$ és $x \geq 1$, akkor igazold, hogy $\left[\sqrt{[x]\cdot\left[x+\frac{1}{2}\right]+1}+\frac{1}{2}\right] = \left[x+\frac{1}{2}\right]$, ahol $[a]$ az $a \in \mathbb{R}$ egész részét jelöli.

Matlap 10/2024, L:3802
Jakab Tibor, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Legyen $\left[x+\frac{1}{2}\right] = k$. Mivel $x \in \mathbb{R}$ és $x \geq 1$, ezért $k \in \mathbb{N}^*$. Ekkor

$$k \leq x+\frac{1}{2} < k+1$$
$$k-\frac{1}{2} \leq x < k+\frac{1}{2}.$$

(1 pont)

Ha $x \in \left[k-\frac{1}{2}, k\right)$, akkor $[x] = k-1$, így

$$\begin{aligned} \left[\sqrt{[x]\cdot\left[x+\frac{1}{2}\right]+1}+\frac{1}{2}\right] &= \left[\sqrt{k(k-1)+1}+\frac{1}{2}\right] \\ &= \left[\sqrt{k^2-k+1}+\frac{1}{2}\right]. \end{aligned}$$

(2 pont)

Igazoljuk, hogy $k \leq \sqrt{k^2-k+1}+\frac{1}{2} < k+1$. Mivel $k \in \mathbb{N}^*$, az egyenlőtlenség egyenértékű az alábbiakkal:

$$k-\frac{1}{2} \leq \sqrt{k^2-k+1} < k+\frac{1}{2}$$
$$k^2-k+\frac{1}{4} \leq k^2-k+1 < k^2+k+\frac{1}{4}.$$

Az egyenlőtlenség bal oldala nyilvánvalóan igaz, a jobb oldal pedig egyenértékű azzal, hogy $k > \frac{3}{8}$, ami szintén igaz.

Tehát $\left[\sqrt{[x]\cdot\left[x+\frac{1}{2}\right]+1}+\frac{1}{2}\right] = k.$

(2 pont)

Ha $x \in \left[k, k+\frac{1}{2}\right)$, akkor $[x] = k$, így

$$\left[\sqrt{[x]\cdot\left[x+\frac{1}{2}\right]+1}+\frac{1}{2}\right] = \left[\sqrt{k^2+1}+\frac{1}{2}\right].$$

(2 pont)

Igazoljuk, hogy $k \leq \sqrt{k^2+1} + \frac{1}{2} < k+1$. Mivel $k \in \mathbb{N}^*$, az egyenlőtlenség egyenértékű azzal, hogy:

$$k - \frac{1}{2} \leq \sqrt{k^2+1} < k + \frac{1}{2}$$

$$k^2 - k + \frac{1}{4} \leq k^2 + 1 < k^2 + k + \frac{1}{4},$$

ami igaz, tehát $\left[\sqrt{[x] \cdot \left[x + \frac{1}{2}\right] + 1} + \frac{1}{2}\right] = k.$ **(2 pont)**

■

3. feladat (10 pont). Az $1, 2, 3, \ldots, 2025$ számok közül kiválasztunk 1014 számot úgy, hogy a legnagyobb kiválasztott szám páratlan legyen. Igazold, hogy bármilyen választás esetén a kiválasztott számok között van kettő, amelyeknek az összege a legnagyobb kiválasztott számmal egyenlő!

Spier Tünde, Arad

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Legyen a legnagyobb kiválasztott szám $2p+1$, ahol $p \in \mathbb{N}$. A $2p+1$-nél kisebb számokat olyan párokba rendezzük, amelyekben az összeg $2p+1$, azaz: $(1, 2p)$, $(2, 2p-1)$, $\ldots$,$(p, p+1)$. **(2 pont)**

Ez p darab párt jelent, és a $2p+1$-nél kisebb számok mindegyike pontosan egy ilyen párban szerepel. **(1 pont)**

Mivel $2p+1 \leq 2025$, ezért $p \leq 1012$, következik, hogy $p+2 \leq 1014$. **(1 pont)**

Tehát legalább $p+2$ számot választottunk az $1, 2, \ldots, 2p, 2p+1$ számok közül. **(1 pont)**

Mivel ezek közül az egyik a $2p+1$, ez azt jelenti, hogy legalább $p+1$ számot választottunk az $1, 2, \ldots, 2p$ számok közül. **(1 pont)**

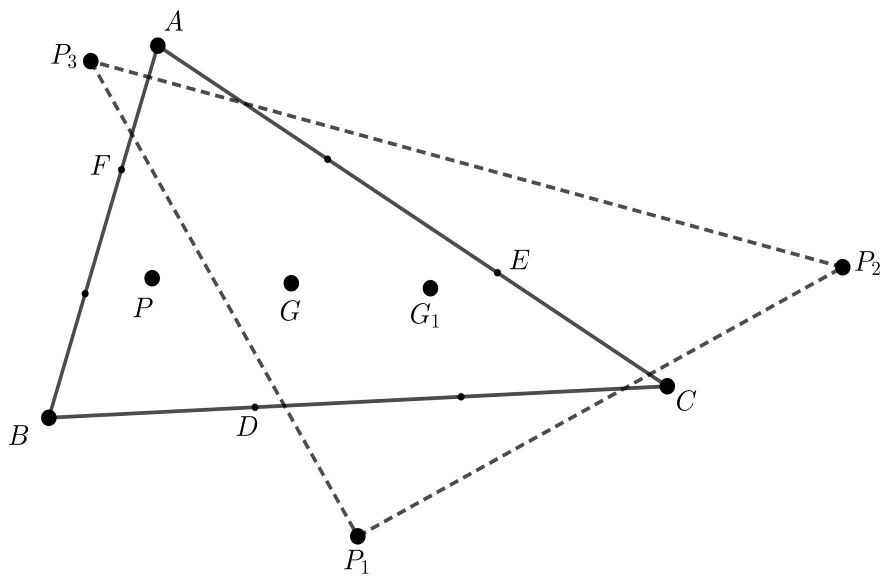
Mivel az $1, 2, \ldots, 2p$ számokat p párba rendeztük el és legalább $p+1$ számot választottunk közülük, a skatulyaelv alapján van olyan pár, amelynek mindkét tagját kiválasztottuk. **(3 pont)**

■

4. feladat (10 pont). Az ABC háromszög síkjában P egy tetszőleges pont. A D, E és F azok a pontok, amelyekre $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{BF} = -2\overrightarrow{AF}$. A P pontnak a D, E és F pontok szerinti szimmetrikusát jelölje rendre P_1, P_2 és P_3. Ha G az ABC háromszög súlypontja és G_1 a $P_1P_2P_3$ háromszög súlypontja, akkor igazold, hogy G a PG_1 szakasz felezőpontja!

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



Mivel G_1 a $P_1P_2P_3$ háromszög súlypontja, ezért

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PG_1} &= \frac{\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}+\overrightarrow{PP_3}}{3}\\ &= \frac{2(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF})}{3}.\end{aligned}$$

(3 pont)

Továbbá $\frac{BD}{DC}=\frac{1}{2}$, így

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PD} &= \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot\overrightarrow{PB}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}\cdot\overrightarrow{PC}\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}.\end{aligned}$$

Hasonlóan $\overrightarrow{PE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}$, valamint $\overrightarrow{PF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}$. **(3 pont)**
Tehát

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PG_1} &= \frac{2(\frac{2}{3}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PB})}{3}\\ &= \frac{2(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})}{3}=2\cdot\overrightarrow{PG},\end{aligned}$$

ez pedig azt jelenti, hogy G a PG_1 szakasz felezőpontja. **(3 pont)**

■

Megjegyzés. Egy szemléletes ábra elkészítésére az első háromból egy pont jár.