MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
megyei szakasz, 2025. február 1.

IX. osztály

1. feladat. Ha x, y, z, t szigorúan pozitív valós számok, akkor igazold az alábbi egyenlőtlenségeket:

a) $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zt} + \sqrt{tx} \leq x + y + z + t$,

b) $\dfrac{1}{x+y+z} \leq \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)$,

c) $\dfrac{1}{x+y+\sqrt{zt}} + \dfrac{1}{y+z+\sqrt{tx}} + \dfrac{1}{z+t+\sqrt{xy}} + \dfrac{1}{t+x+\sqrt{yz}} \leq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{t}\right)$.

2. feladat. Ha $x \in \mathbb{R}$ és $x \geq 1$, akkor igazold, hogy $\left[\sqrt{[x] \cdot \left[x + \dfrac{1}{2}\right] + 1} + \dfrac{1}{2}\right] = \left[x + \dfrac{1}{2}\right]$, ahol $[a]$ az $a \in \mathbb{R}$ egész részét jelöli.

3. feladat. Az $1, 2, 3, \ldots, 2025$ számok közül kiválasztunk 1014 számot úgy, hogy a legnagyobb kiválasztott szám páratlan legyen. Igazold, hogy bármilyen választás esetén a kiválasztott számok között van kettő, amelyeknek az összege a legnagyobb kiválasztott számmal egyenlő!

4. feladat. Az ABC háromszög síkjában P egy tetszőleges pont. A D, E és F azok a pontok, amelyekre $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{BF} = -2\overrightarrow{AF}$. A P pontnak a D, E és F pontok szerinti szimmetrikusát jelölje rendre P_1, P_2 és P_3. Ha G az ABC háromszög súlypontja és G_1 a $P_1P_2P_3$ háromszög súlypontja, akkor igazold, hogy G a PG_1 szakasz felezőpontja!

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.