VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
megyei szakasz, 2025. február 1.

VIII. osztály

1. feladat (10 pont). a) Igazold, hogy ha $x, y \in \mathbb{R}^*$ és $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{2024}=0$, akkor az

$$n=\left(\frac{x}{8}+253\right)\left(\frac{y}{8}+253\right)-9$$

szám egy természetes szám köbe!

b) Bizonyítsd be, hogy ha az a, b, c számjegyek esetén $\left(\overline{ab}\right)^2-c^2=2024$, akkor az $n=\overline{ab}-c$ szám osztható 11-gyel!

Matlap 10/A: 5021, 2024

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) A megadott összefüggés a következő egyenértékű alakokba írható:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{2024}=0 \iff \frac{xy+2024x+2024y}{2024xy}=0 \iff xy+2024x+2024y=0. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Az n szám felírásában közös nevezőre hozunk, majd felbontjuk a zárójeleket és felhasználjuk az előbb kapott összefüggést:

$$\begin{aligned} n &= \left(\frac{x}{8}+253\right)\cdot\left(\frac{y}{8}+253\right)-9=\left(\frac{x+2024}{8}\right)\cdot\left(\frac{y+2024}{8}\right)-9 \\ &= \frac{xy+2024x+2024y+2024^2}{64}-9=\frac{2024^2}{64}-9=64009-9 \\ &= 64000. \end{aligned} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

A fentiekből következik, hogy $n=64000=40^3$, tehát n a 40-nek a köbe. **(1 pont)**

b) Az $\left(\overline{ab}\right)^2-c^2=2024$ felírásból következik, hogy $\left(\overline{ab}-c\right)\cdot\left(\overline{ab}+c\right)=2024$. **(1 pont)**

Keressük a $2024=2^3\cdot 11\cdot 23$ szám azon $(\overline{ab}-c, \overline{ab}+c)$ osztópárjait, amelyekre $\overline{ab}-c \leq \overline{ab}+c$ és a szorzatuk kiadja a 2024-et:

$$\left(\overline{ab}-c,\ \overline{ab}+c\right) \in \{(1,2024);(2,1012);(4,506);(8,253);(11,184);(22,92);(23,88);(44,46)\}.$$

(1 pont)

Az $\left(\overline{ab}+c\right)-\left(\overline{ab}-c\right)=2c\leq 18$ feltételt a felsoroltak közül csak a $(44,46)$ osztópár teljesíti. Innen következik, hogy $n=\overline{ab}-c=44$, tehát az n szám osztható 11-gyel. **(2 pont)**

■

2. feladat (10 pont). a) Igazold, hogy ha k természetes szám, akkor fennáll a következő egyenlőség:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+2}}=\left(\sqrt{\frac{k+2}{k+1}}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+2}}\right).$$

b) Igazold, hogy teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{1}{81\sqrt{82}}+\frac{1}{82\sqrt{83}}+\frac{1}{83\sqrt{84}}+\cdots+\frac{1}{2024\sqrt{2025}}>\frac{8}{45}.$$

***

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Közös nevezőre hozzuk és elvégezzük a műveleteket:

$$\left(\sqrt{\frac{k+2}{k+1}}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)=\left(\frac{\sqrt{k+2}}{\sqrt{k+1}}+\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}}\right)\cdot\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}\cdot\sqrt{k+2}} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}\right)\cdot\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\right)}{\sqrt{k+1}\cdot\sqrt{k+1}\cdot\sqrt{k+2}} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$=\frac{k+2-k-1}{(k+1)\sqrt{k+2}}=\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+2}}, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

amit igazolni kellett.

b) Felhasználjuk az a) alpontban bizonyított egyenlőséget és azt, hogy bármely k természetes szám esetén $\frac{k+2}{k+1}>1$, ezért $\sqrt{\frac{k+2}{k+1}}+1>2$, minden $k\in\mathbb{N}$ esetén. **(2 pont)**

Tehát felírhatjuk, hogy

$$\frac{1}{81\sqrt{82}}+\frac{1}{82\sqrt{83}}+\frac{1}{83\sqrt{84}}+\cdots+\frac{1}{2024\sqrt{2025}}=$$

$$=\left[\sqrt{\frac{82}{81}}+1\right]\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{81}}-\frac{1}{\sqrt{82}}\right]+\left[\sqrt{\frac{83}{82}}+1\right]\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{82}}-\frac{1}{\sqrt{83}}\right]+$$

$$+\left[\sqrt{\frac{84}{83}}+1\right]\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{83}}-\frac{1}{\sqrt{84}}\right]+\cdots+\left[\sqrt{\frac{2025}{2024}}+1\right]\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2024}}-\frac{1}{\sqrt{2025}}\right] \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$>2\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{81}}-\frac{1}{\sqrt{82}}\right]+2\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{82}}-\frac{1}{\sqrt{83}}\right]+2\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{83}}-\frac{1}{\sqrt{84}}\right]+\cdots+2\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2024}}-\frac{1}{\sqrt{2025}}\right]$$

$$=2\cdot\frac{1}{\sqrt{81}}-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2025}}=\frac{2}{9}-\frac{2}{45}$$

$$=\frac{8}{45},$$

tehát $\frac{1}{81\sqrt{82}}+\frac{1}{82\sqrt{83}}+\frac{1}{83\sqrt{84}}+\cdots+\frac{1}{2024\sqrt{2025}}>\frac{8}{45}$, amit igazolni kellett. **(2 pont)**

■

3. feladat (10 pont). Koppány az $ABCDA'B'C'D'$ kocka minden csúcsára felírta az 1 és 0 számok valamelyikét. Miután az egyes oldallapokhoz tartozó csúcsokra írt számokat összeadta, minden esetben a 4, 3 vagy 2 értékek valamelyikét kapta, mindegyiket legalább egyszer és az $ABCD$ oldallap esetén 4-et kapott összegül.

a) Hányféleképpen írhatta fel Koppány az 1 és a 0 számokat a kocka csúcsaira? Két felírást különbözőnek tekintünk, ha a két felírásban valamelyik csúcson különböző szám szerepel. Válaszodat indokold! Sorold fel az eseteket és készíts ábrát mindegyikhez!

b) Elemi lépésnek nevezzük azt, hogy egy tetszőleges él két végpontjában található értékeket a 2025 szám ugyanazon prímosztójával növeljük. Előfordulhat-e, hogy bizonyos számú elemi lépés után a 8 csúcson azonos értékek jelenjenek meg? Függhet-e ez attól, hogy kezdetben milyen számokat írtunk a csúcsokra?

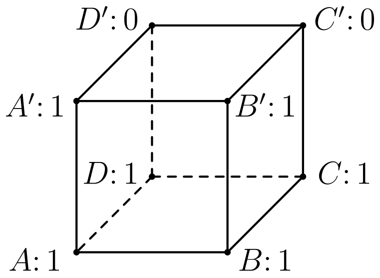
Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad
Nagy Enikő Ilona, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

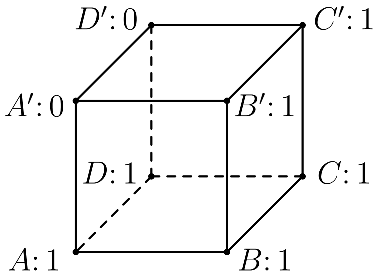
a) Mivel a kocka $ABCD$ oldallapján lévő csúcsokhoz tartozó számok összege 4, ezért az A, B, C, D csúcsokra biztosan 1-esek vannak írva. **(1 pont)**

Az A', B', C', D' csúcsokra Koppány pontosan két darab 1-est kell írjon, mivel ha többet írna, akkor a kockának nem lenne olyan oldallapja, amelyhez tartozó összeg 2 lenne, míg ha kevesebbet írna, akkor a kockának lenne olyan oldallapja, amelyhez tartozó összeg 1-gyel, vagy 0-val lenne egyenlő, ami nem felelne meg a feltételeknek. **(1 pont)**

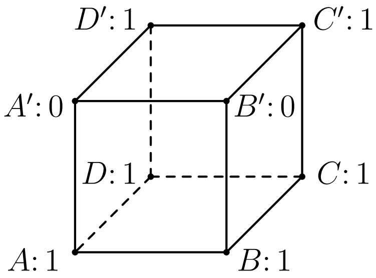
Az $A'B'C'D'$ oldallap csúcsaira koppány felírhatja a két 1-est egymás mellé vagy átlósan, tehát az alábbi ábrán látható 6 eset lehetséges:



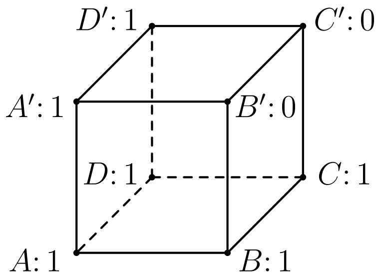
1. ábra.



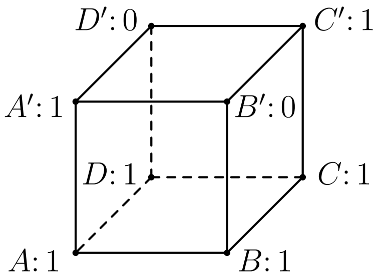
2. ábra.



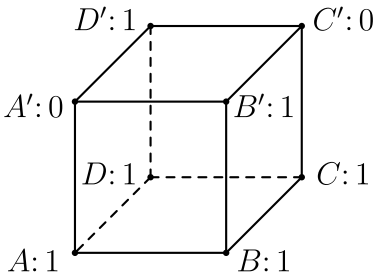
3. ábra.



4. ábra.



5. ábra.



6. ábra.

(2 pont)

b) Mivel $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ ezért egy elemi lépés után egy él végpontjaiban lévő számok értéke 3-mal vagy 5-tel fog nőni. Tekintjük először az első esetet, amely a 1. ábrán látható. Ha a $C'D'$ él mindkét végpontjában lévő számhoz hozzáadunk kétszer 5-öt, az AB, DC, $A'B'$ élek végpontjaiban lévő számokhoz pedig háromszor 3-mat, ekkor a kocka minden csúcsán a 10 fog szerepelni. Mivel a 2., 3., 4. ábrán lévő esetek az 1. ábrán lévő eset elforgatása (egy függőleges tengely körül), ezért ezek az esetekben hasonlóan elérhető, hogy mindegyik csúcson 10 szerepeljen. **(2 pont)**

Most előbb nézzük az 5. ábrán található esetet. A kocka bármely élének egyik végpontja az A, C, B', D' csúcsok, míg a másik végpontja az A', C', B, D csúcsok között van. Így egy elemi lépés során az A, C, B', D' csúcsokon lévő számok összege ugyanannyival nő, mint az A', C', B, D csúcsokon lévő számok összege. Ha elérhető, hogy minden csúcson ugyanaz az érték szerepeljen, akkor valamennyi elemi lépés során az A, C, B', D' csúcsokon lévő számok összege egyenlő kellene legyen az A', C', B, D csúcsokon lévő számok összegével. De a kezdeti felírás után az A, C, B', D' csúcsokon lévő számok összege 2, míg az A', C', B, D csúcsokon lévő számok összege 4, illetve minden elemi lépés során ugyanannyival növeljük mindkét összeget, így nem érhető el, hogy a megnövelt összegek valaha is egyenlőek legyenek. Tehát az 5. ábrának megfelelő esetben nem lehet elérni elemi lépések segítségével, hogy a kocka minden csúcsán ugyanaz az érték szerepeljen.

A 6. ábra esetén szintén nem érthető el, mivel a kezdeti felírás után az A, C, B', D' csúcsokon lévő számok összege 4, míg az A', C', B, D csúcsokon lévő számok összege 2. **(3 pont)**

■

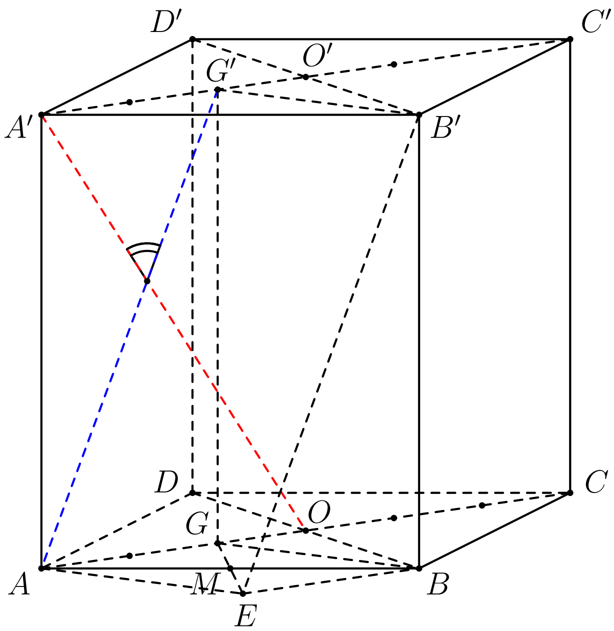
4. feladat (10 pont). Adott az $ABCDA'B'C'D'$ téglatest, melyben $AA' = a$ és $AB = BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Jelöljük O-val az AC és BD átlók metszéspontját, valamint G-vel az AO szakasz O-hoz közelebb eső harmadoló pontját. Legyen E a G pont szimmetrikusa az AB oldal felezőpontjára nézve.

a) Ha G' pont az $A'B'D'$ háromszög súlypontja, akkor igazold, hogy az A, E, B', G' pontok egy síkban vannak!

b) Határozd meg a $B'E$ és az $A'O$ egyenesek által alkotott szög mértékét!

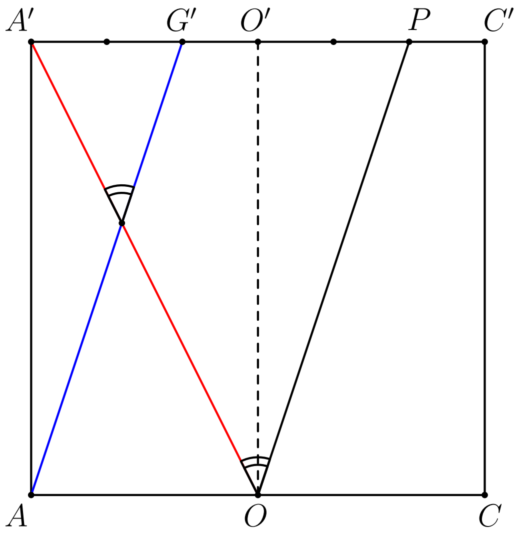
Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad
Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



a) Legyen O' az $A'C'$ és $B'D'$ átlók metszéspontja, M az AB szakasz felezőpontja, G' az $A'O'$ szakasz O'-hez közelebb eső harmadolópontja. Mivel $AM = MB$ és $GM = ME$, következik, hogy az $AEBG$ négyszög paralelogramma. Továbbá tudjuk, hogy $GBB'G'$ téglalap, ezekből következik, hogy $AE \parallel GB$ és $AE \equiv GB$, illetve $GB \parallel G'B'$ és $GB \equiv G'B'$, tehát az $AEB'G'$ négyszög egy paralelogramma, s így az A, E, B', G' pontok egy síkban vannak. (**3 pont**)

b) Mivel $AEB'G'$ paralelogramma, innen következik, hogy $B'E$ párhuzamos AG'-tel, így a $B'E$ és $A'O$ egyenesek szögének mértéke megegyezik a $G'A$ és $A'O$ egyenesek szögének mértékével. (**1 pont**)



Legyen P az $O'C'$ szakasz C'-hez közelebb eső harmadolópontja. A szerkesztés alapján

$$AO = G'P = \frac{AC}{2},$$

és tudjuk, hogy $AO \parallel G'P$, ebből következik, hogy $AOPG'$ paralelogramma. Tehát $G'A \parallel PO$, ebből következik, hogy $B'E$ és $A'O$ egyenesek szögének mértéke (amely megegyezik az $G'A$ és $A'O$ egyenesek szögének mértékével) tulajdonképpen megegyezik a $\widehat{POA'} = \alpha$ szög mértékével. (**1 pont**)

Mivel $ABCDA'B'C'D'$ téglatest, ezért az $ABCD$ és $ACC'A'$ négyszögek téglalapok. A feltevés szerint $AB = BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, következik, hogy $ABCD$ négyzet, ahonnan kapjuk, hogy

$$AC = AB \cdot \sqrt{2} = a = AA',$$

tehát az $ACC'A'$ téglalap egy négyzet. (**1 pont**)

Felírjuk kétféleképpen a POA' háromszög területét. Egyrészt

$$T_{POA'_\triangle} = \frac{A'P \cdot OO'}{2} = \frac{\frac{5}{6} \cdot a \cdot a}{2} = \frac{5a^2}{12}.$$ (**1 pont**)

Másrészt, Pitágorász tétele segítségével kiszámolhatjuk, hogy

$$A'O = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \quad \text{és} \quad PO = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{10}}{3},$$

ami alapján

$$T_{POA'_\triangle} = \frac{A'O \cdot PO \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{3} \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{5a^2\sqrt{2}}{12} \cdot \sin\alpha.$$ (**1 pont**)

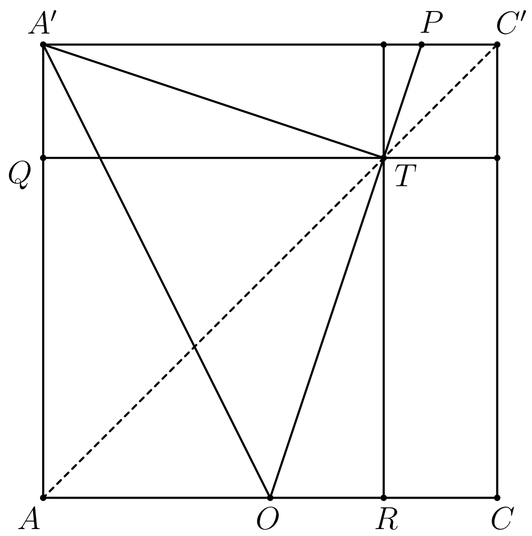
Ezekből adódik, hogy

$$\sin\alpha = \frac{5a^2}{12} \cdot \frac{12}{5a^2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

tehát az $\alpha = 45°$. **(1 pont)**

Megjegyzés. Az utolsó 5 pont megszerezhető tetszőleges gondolatmenettel, amely alapján meghatározható az $A'O$ és az AG' által bezárt szög mértéke.

Megjegyzés. A $\widehat{POA'}$ szög mértéke a következőképpen is meghatározható:



Jelöljük az AC' és PO egyenesek metszéspontját T-vel. A T ponton át az $ACC'A'$ négyzet oldalaival párhuzamos egyeneseket húzunk, amelyek az AA' egyenest a Q pontban, míg a AC egyenest az R pontban metszik. Ha a TRO háromszöget a T pont körül az óramutató járásával megegyező irányba 90°-kal elforgatjuk, akkor pontosan a TQA' háromszöget kapjuk. Ebből következik, hogy a TOA' háromszög egyenlő szárú derékszögű, tehát a keresett szög

$$\widehat{POA'} = \widehat{TOA'} = 45°.$$ **(4 pont)**

■