



VII. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXIV. EMMV

megyei szakasz, 2025. február 1.

VIII. osztály

1. feladat. a) Igazold, hogy ha $x, y \in \mathbb{R}^*$ és $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2024} = 0$, akkor az

$$n = \left(\frac{x}{8} + 253\right) \left(\frac{y}{8} + 253\right) - 9$$

szám egy természetes szám köbe!

b) Bizonyítsd be, hogy ha az a, b, c számjegyek esetén $(\overline{ab})^2 - c^2 = 2024$, akkor az $n = \overline{ab} - c$ szám osztható 11-gyel!

2. feladat. a) Igazold, hogy ha k természetes szám, akkor fennáll a következő egyenlőség:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+2}} = \left(\sqrt{\frac{k+2}{k+1}} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}\right).$$

b) Igazold, hogy teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{1}{81\sqrt{82}} + \frac{1}{82\sqrt{83}} + \frac{1}{83\sqrt{84}} + \cdots + \frac{1}{2024\sqrt{2025}} > \frac{8}{45}.$$

3. feladat. Koppány az $ABCD A' B' C' D'$ kocka minden csúcsára felírta az 1 és 0 számok valamelyikét. Miután az egyes oldallapokhoz tartozó csúcsokra írt számokat összeadta, minden esetben a 4, 3 vagy 2 értékek valamelyikét kapta, mindegyiket legalább egyszer és az $ABCD$ oldallap esetén 4-et kapott összegül.

a) Hányféleképpen írhatta fel Koppány az 1 és a 0 számokat a kocka csúcsaira? Két felírást különbözőnek tekintünk, ha a két felírásban valamelyik csúcson különböző szám szerepel. Válaszodat indokold! Sorold fel az eseteket és készíts ábrát mindegyikhez!

b) Elemi lépésnek nevezzük azt, hogy egy tetszőleges él két végpontjában található értékeket a 2025 szám ugyanazon prímosztójával növeljük. Előfordulhat-e, hogy bizonyos számú elemi lépés után a 8 csúcson azonos értékek jelenjenek meg? Függhet-e ez attól, hogy kezdetben milyen számokat írtunk a csúcsokra?

4. feladat. Adott az $ABCD A' B' C' D'$ téglatest, melyben $AA' = a$ és $AB = BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Jelöljük O -val az AC és BD átlók metszéspontját, valamint G -vel az AO szakasz O -hoz közelebb eső harmadoló pontját. Legyen E a G pont szimmetrikusa az AB oldal felezőpontjára nézve.

a) Ha G' pont az $A' B' D'$ háromszög súlypontja, akkor igazold, hogy az A, E, B', G' pontok egy síkban vannak!

b) Határozd meg a $B'E$ és az $A'O$ egyenesek által alkotott szög mértékét!

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.