VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
megyei szakasz, 2025. február 1.

VII. osztály

1. feladat (10 pont). A hét törpe kártyajátékot játszik egy különleges 2025 kártyából álló paklival. A kártyákon egy 1 és 2025 közötti természetes szám szerepel a gyök alatt. Mindegyik kártyán pontosan egy szám van és egyetlen szám sem szerepel két kártyán. A megkevert pakliból a törpék egymás után húznak egy-egy kártyát, amíg a pakli el nem fogy.
Bizonyítsd, hogy amikor az összes kártyát kihúzták lesz legalább egy törpe, akinek a kártyáin egyetlen természetes szám négyzete sem szerepel!

Gergely Anna, Székelyudvarhely

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
A kártyákon tehát szerepelnek a $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots, \sqrt{2025}$ számok, valamilyen sorrendben. Ahhoz, hogy egy kártyán természetes szám szerepeljen, a kártyán lévő érték $\sqrt{k^2}$ alakú kell legyen, ahol $k \in \mathbb{N}$. **(2 pont)**
Észrevehetjük, hogy $2025 = 45^2$. **(1 pont)**
Így a kártyákon szereplő természetes számok az

$$1 = \sqrt{1}, \quad 2 = \sqrt{4}, \quad 3 = \sqrt{9}, \quad \ldots, \quad 45 = \sqrt{2025}.$$ **(2 pont)**

Viszont ezek között csak az $1 = 1^2, 4 = 2^2, 9 = 3^2, \ldots, 36 = 6^2$ számok négyzetszámok. **(2 pont)**
Mivel 7 törpe játszik, és összesen 6 darab négyzetszám szerepel a kártyákon, így a skatulya-elv alapján biztosan lesz legalább egy olyan törpe, akinek kártyáin nem szerepel egy természetes szám négyzete sem. **(2 pont)**
■

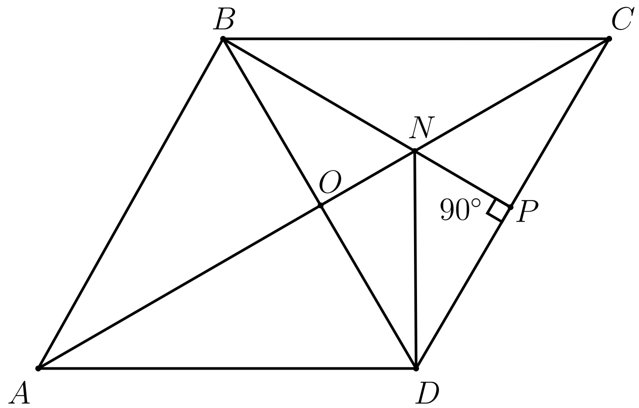
2. feladat (10 pont). Az $ABCD$ paralelogrammában $AD \equiv BD$, P a DC oldal egy olyan pontja, hogy $BP \perp DC$, továbbá $BP \cap AC = \{N\}$.

a) Bizonyítsd, hogy $NC \equiv ND$ és $AN = 2 \cdot ND$.

b) Bizonyítsd, hogy $\widehat{CAD} = 30°$ akkor és csakis akkor, ha $ABCD$ rombusz!

***

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



a) Az $ABCD$ paralelogramma, ezért $AD \equiv BC$, továbbá a megadott feltétel alapján $BD \equiv AD$. Tehát $BD \equiv BC$ és a BCD háromszög egyenlő szárú. A BCD egyenlő szárú háromszögben BP magasság egyben oldalfelező is. (**1 pont**)

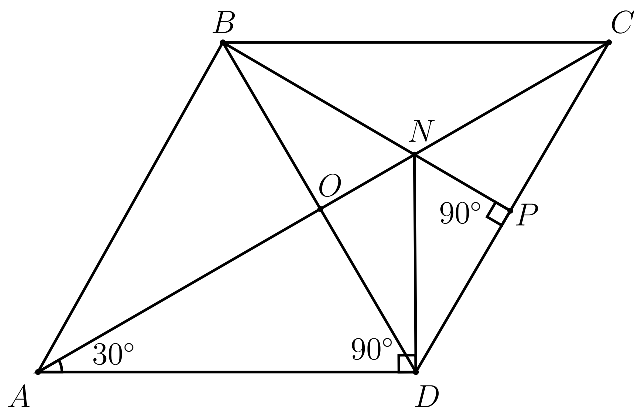
Az N pont rajta van a DC szakasz BP odalfelező merőlegesén, ezért az NDC háromszög egyenlő szárú és $NC \equiv ND$. (**1 pont**)

Az $ABCD$ paralelogrammában az AC és BD átló közös felezőpontja legyen O. Ekkor az N pont a BCD háromszög OC és BP oldalfelezőinek metszéspontja, tehát N a BCD háromszög súlypontja. (**1 pont**)

Az N súlypont harmadolja az OC oldalfelezőt, így $NC = \frac{2}{3} \cdot OC$, továbbá

$$AN = AC - NC = 2 \cdot OC - \frac{2}{3} \cdot OC = \frac{4}{3} \cdot OC = 2 \cdot NC.$$

Felhasználva, hogy $NC \equiv ND$, kapjuk, hogy $AN = 2 \cdot ND$. (**1 pont**)



b) Először tegyük fel, hogy $\widehat{CAD} = 30°$. Az AND háromszögben $AN = 2 \cdot ND$ és $\widehat{CAD} = 30°$. Igazolni fogjuk, hogy $ND \perp DA$. Ha $\widehat{NDA} \neq 90°$, akkor legyen M az N pontból az AD egyenesre bocsájtott merőleges talppontja, vagyis $M \in AD$ és $NM \perp AD$. Ekkor az NMA derékszögű háromszögben $\widehat{NAM} = 30°$, így ezzel a szöggel szembeni befogó hossza fele olyan hosszú, mint az átfogó, vagyis $AN = 2 \cdot NM$. Tehát $NM \equiv ND$, ezért az NMD háromszög egyenlős szárú, továbbá $\widehat{NMD} = 90°$. Ez ellentmondáshoz vezet, tehát D egybe kell essen az M ponttal, vagyis $ND \perp AD$. (**1 pont**)

Az $AD \parallel BC$ és $ND \perp AD$ alapján $ND \perp BC$, így ND a BCD háromszög magassága. Az N pont a BP és ND magasságok metszéspontja, tehát N a BCD háromszög magasságpontja, (**1 pont**)

ahonnan következik, hogy $NC \perp BD$, így $CO \perp BD$. Az $ABCD$ paralelogramma átlói merőlegesek egymásra, ezért $ABCD$ rombusz. (**1 pont**)

Végül tételezzük fel, hogy $ABCD$ rombusz. Ekkor $AD \equiv BD$, illetve a feltétel alapján $AD \equiv BD$. Innen következik, hogy az ABD háromszög egyenlő oldalú, sajátosan $\widehat{BAD} = 60°$. (**1 pont**)

Az $ABCD$ rombuszban az átlók felezik egymást és merőlegesek egymásra, így AO az ABD egyenlő oldalú háromszögben oldalfelező merőleges, ezért szögfelező is, ahonnan következik, hogy $\widehat{CAD} = \widehat{DAO} = 30°$. (**1 pont**)

■

3. feladat (10 pont). a) Határozd meg azon $x \geq 0$ racionális számokat, amelyekre $\dfrac{10x+1}{x+1}$ négyzetszám!

b) Oldd meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán:

$$\frac{x+1}{5}+\frac{x+2}{6}+\frac{x+3}{7}+\dots+\frac{x+2024}{2028}=\frac{2024^2}{2023}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{2023\cdot 2024}\right).$$

Matlap 10/A: 5017, 2024

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Mivel $x \geq 0$, ezért $1 \leq 10x+1 < 10x+10$, ahonnan következik, hogy

$$1=\frac{x+1}{x+1}\leq\frac{10x+1}{x+1}<\frac{10x+10}{x+1}=10.$$

Ha $\frac{10x+1}{x+1}$ az n természetes szám négyzete, vagyis $\frac{10x+1}{x+1}=n^2$, akkor $1 \leq n^2 < 10$, ahonnan kapjuk, hogy n^2 csak 1, 4 vagy 9 lehet. **(2 pont)**

Kipróbáljuk ezeket az eseteket.

- Ha $n^2=1$, akkor
$$\frac{10x+1}{x+1}=1 \iff 10x+1=x+1 \iff 9x=0 \iff x=0.$$
- Ha $n^2=4$, akkor
$$\frac{10x+1}{x+1}=4 \iff 10x+1=4x+4 \iff 6x=3 \iff x=\frac{1}{2}.$$
- Ha $n^2=9$, akkor
$$\frac{10x+1}{x+1}=9 \iff 10x+1=9x+9 \iff x=8.$$

  Összegezve $x \in \{0, \frac{1}{2}, 8\}$. **(2 pont)**

b) Minden k pozitív természetes szám esetén

$$\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{(k+1)-k}{k\cdot(k+1)}=\frac{k+1}{k\cdot(k+1)}-\frac{k}{k\cdot(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

Ezt felhasználva az egyenlet jobb oldalán álló zárójel átírható a következőképpen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{2023\cdot 2024}&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{2023\cdot 2024}\\&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2023}-\frac{1}{2024}\right)\\&=\frac{1}{1}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\dots\\&\quad\dots+\left(-\frac{1}{2023}+\frac{1}{2023}\right)-\frac{1}{2024}\\&=\frac{1}{1}-\frac{1}{2024}\\&=\frac{2023}{2024}.\end{aligned}$$

(2 pont)

Ekkor az egyenlet a következő egyenértékű formákba írható át:

$$\frac{x+1}{5}+\frac{x+2}{6}+\frac{x+3}{7}+\cdots+\frac{x+2024}{2028}=\frac{2024^2}{2023}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2023\cdot 2024}\right),$$
$$\frac{x+1}{5}+\frac{x+2}{6}+\frac{x+3}{7}+\cdots+\frac{x+2024}{2028}=\frac{2024^2}{2023}\cdot\frac{2023}{2024},$$
$$\frac{x+1}{5}+\frac{x+2}{6}+\frac{x+3}{7}+\cdots+\frac{x+2024}{2028}=2024.$$ **(1 pont)**

Átrendezve a következőket kapjuk:

$$\frac{x+1}{5}+\frac{x+2}{6}+\frac{x+3}{7}+\cdots+\frac{x+2024}{2028}-2024=0,$$
$$\left(\frac{x+1}{5}-1\right)+\left(\frac{x+2}{6}-1\right)+\left(\frac{x+3}{7}-1\right)+\cdots+\left(\frac{x+2024}{2028}-1\right)=0,$$
$$\frac{x-4}{5}+\frac{x-4}{6}+\frac{x-4}{7}+\cdots+\frac{x-4}{2028}=0,$$
$$(x-4)\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2028}\right)=0.$$ **(1 pont)**

Viszont ebben az egyenletben az $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2028}\neq 0$, ezért $x-4=0$, azaz $x=4\in\mathbb{Q}$. **(1 pont)**

Megjegyzés. Az $\frac{x+1}{5}+\frac{x+2}{6}+\frac{x+3}{7}+\cdots+\frac{x+2024}{2028}=2024$ egyenlet úgy is megoldható, hogy kitaláljuk és behelyettesítéssel ellenőrizzük, hogy $x=4$ megoldás, illetve felhasználjuk, hogy az elsőfokú ($ax=b$ alakú) egyenletnek egyetlen megoldása van, ha $a\neq 0$.

■

4. feladat (10 pont). Az ABC háromszögben O a BC oldal felezőpontja, E és F pedig az AB és AC oldalaknak olyan belső pontjai, amelyekre $AE=3\cdot EB$ és $CF=3\cdot AF$. Az E és F pontokon keresztül az AO egyenessel húzott párhuzamosok a BC oldalt az M, illetve N pontokban metszik. Bizonyítsd be, hogy:

a) $EMNF$ trapéz és $EM+FN=AO$;

b) $\frac{T_{EMNF}}{T_{ABC}}=\frac{1}{2}$.

Simon József, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) A feltevés alapján $EM\parallel AO$ és $FN\parallel AO$, tehát $EM\parallel FN$. **(1 pont)**

Igazoljuk, hogy $EF\nparallel BC$. Legyen K és S az AB, illetve AC oldalak felezőpontjai. Illetve H az SC felezőpontja. A KS az ABC háromszög középvonala, így $KS\parallel BC$. Innen következik, hogy $KSCB$ trapéz, illetve EH a középvonala, tehát $EH\parallel BC$. Mivel egy ponton át egy egyenessel csak egy párhuzamos húzható, ezért ha $EF\parallel BC$, akkor $F=H$, ami ellentmond annak, hogy $CF=\frac{3}{4}AC$ és $CH=\frac{1}{4}AC$. Tehát $EF\nparallel BC$, így $EMNF$ trapéz. **(1 pont)**

Legyenek L és T a BO és OC szakaszok felezőpontjai. Így KL és ST az AOB és AOC háromszögek középvonalai, tehát

$$KL=\frac{1}{2}AO \quad \text{és} \quad ST=\frac{1}{2}AO.$$

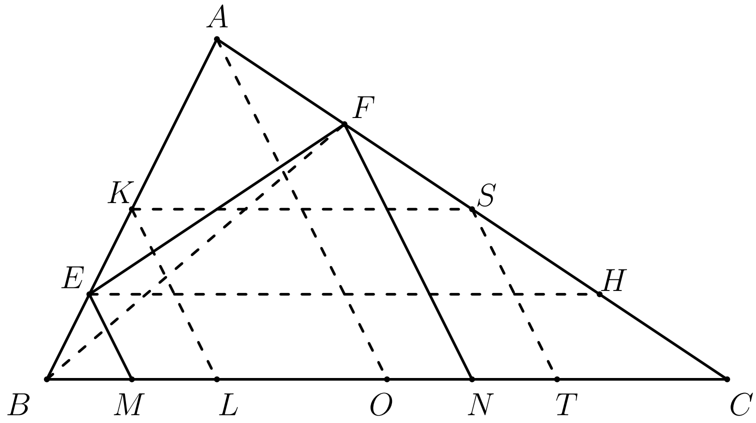
Az EM a BKL háromszög középvonala, vagyis

$$EM = \frac{KL}{2} = \frac{1}{4}AO. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az FN a $AOTS$ trapéz középvonala, vagyis

$$FN = \frac{AO + ST}{2}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $ST = \frac{AO}{2}$, így $FN = \frac{AO+\frac{AO}{2}}{2} = \frac{3}{4}AO$, ahonnan pedig $EM + FN = AO$. **(1 pont)**



b) Mivel O a BC felezőpontja, ezért $T_{ABO_\triangle} = \frac{1}{2}T_{ABC_\triangle}$. Továbbá KL középvonal az ABO háromszögben, így $T_{BKL_\triangle} = \frac{1}{4}T_{ABO_\triangle}$, illetve EM középvonal az BKL háromszögben, így $T_{BEM_\triangle} = \frac{1}{4}T_{BKL_\triangle}$. Összegezve, azt kaptuk, hogy

$$T_{BEM_\triangle} = \frac{1}{4}T_{BKL_\triangle} = \frac{1}{16}T_{ABO_\triangle} = \frac{1}{32}T_{ABC_\triangle}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Legyen AQ az ABC háromszög A csúcsából húzott magasság ($Q \in BC$ és $AQ \perp BC$). Ha P a BC oldalon egy olyan pont, hogy $BP = k \cdot BC$, akkor

$$T_{ABP_\triangle} = \frac{BP \cdot AQ}{2} = \frac{k \cdot BC \cdot AQ}{2} = k \cdot \frac{BC \cdot AQ}{2} = k \cdot T_{ABC_\triangle}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A $CF = 3 \cdot AF$ feltételből kapjuk, hogy $AF = \frac{1}{4}AC$ és $CF = \frac{3}{4}AC$. A fenti területek közti összefüggést alkalmazva az ABC háromszögre és az $F \in AC$ osztópontra kapjuk, hogy

$$T_{ABF_\triangle} = \frac{1}{4} \cdot T_{ABC_\triangle}, \quad \text{illetve} \quad T_{FBC_\triangle} = \frac{3}{4} \cdot T_{ABC_\triangle}.$$

Majd újra alkalmazva az ABF háromszögre és az $E \in AB$ osztópontra ($AE = \frac{3}{4}AB$ a megadott feltételek miatt) kapjuk, hogy

$$T_{AEF_\triangle} = \frac{3}{4}T_{ABF_\triangle} = \frac{3}{16}T_{ABC_\triangle}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az FN az $ASTO$ trapéz középvonala és F az AS oldal felezőpontja, így N az OT oldal felezőpontja. Innen kapjuk, hogy

$$NC = NT + TC = \frac{1}{2}OT + TC = \frac{3}{2}TC = \frac{3}{4}OC = \frac{3}{8}BC.$$

A fenti területek közötti összefüggést alkalmazva a BFC háromszögben az $N \in BC$ osztópontra kapjuk, hogy

$$T_{FNC_\triangle} = \frac{3}{8}T_{FBC_\triangle} = \frac{9}{32}T_{ABC_\triangle}.$$

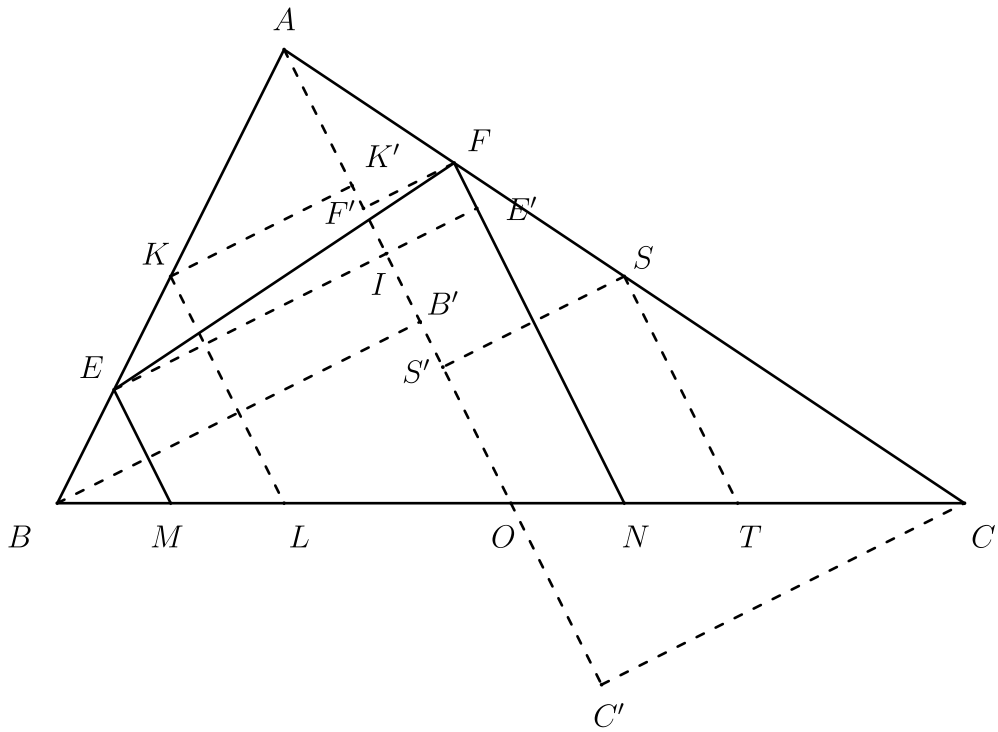
Végül

$$\begin{aligned} T_{EFNM} &= T_{ABC_\triangle} - T_{AEF_\triangle} - T_{BEM_\triangle} - T_{FNC_\triangle} \\ &= T_{ABC_\triangle} - \frac{3}{16}T_{ABC_\triangle} - \frac{1}{32}T_{ABC_\triangle} - \frac{9}{32}T_{ABC_\triangle} \\ &= \left(1 - \frac{6}{32} - \frac{1}{32} - \frac{9}{32}\right)T_{ABC_\triangle} \\ &= \frac{1}{2}T_{ABC_\triangle}. \end{aligned}$$

(**1 pont**)

■

Második megoldás. Hivatalból (**1 pont**)



a) A feltevés alapján $EM \parallel AO$ és $FN \parallel AO$, tehát $EM \parallel FN$. (**1 pont**)

Igazoljuk, hogy $EF \nparallel BC$. Legyenek K és S az AB és AC oldalak felezőpontjai. Akkor $KS \parallel BC$, de KS és EF átlók az $EKFS$ négyszögben, tehát metszik egymást, vagyis $EF \nparallel BC$. Tehát $EMNF$ trapéz. (**1 pont**)

Legyenek L és T a BO és OC szakaszok felezőpontjai. Így KL és ST az AOB és AOC háromszögek középvonalai.

Az EM a $BKL_\triangle$ középvonala, vagyis $EM = \dfrac{KL}{2} = \dfrac{1}{4}AO$. (**1 pont**)

Az FN az $AOTS$ trapéz középvonala, vagyis $FN = \dfrac{AO + ST}{2}$. (**1 pont**)

Mivel $ST = \dfrac{AO}{2}$, így $FN = \dfrac{AO + \frac{AO}{2}}{2} = \dfrac{3}{4}AO$, ahonnan pedig $EM + FN = AO$. (**1 pont**)

b) Legyenek $BB' \perp AO$, $CC' \perp AO$ és $FF' \perp AO$, ahol $B', C', F' \in AO$, valamint $EE' \perp FN$, ahol $E' \in FN$ és $EE' \cap AO = \{I\}$.

Ekkor $OBB'_{\Delta} \equiv OCC'_{\Delta}$, mivel mindkettő derékszögű, $BO \equiv OC$ (átfogók), illetve $\widehat{BOB'} \equiv \widehat{COC'}$ (csúcsszögek). Innen pedig $BB' = CC'$. **(1 pont)**

Megjegyzés. A BB' és CC' kongruenciája bizonyítható egyenlő területek felírásával is. Az AOB_{Δ} területe egyenlő az AOC_{Δ} területével, mert AO oldalfelező. Viszont $BB' \perp AO$, $CC' \perp AO$, így felírható, hogy

$$T_{AOB_{\Delta}} = \frac{AO \cdot BB'}{2} = T_{AOC_{\Delta}} = \frac{AO \cdot CC'}{2} \Longrightarrow BB' = CC' .$$

Legyen $SS' \perp AO$, ahol $S' \in AO$. Az SS' az ACC'_{Δ} középvonala, ahonnan

$$SS' = \frac{CC'}{2} = \frac{BB'}{2} .$$

De FF' középvonal az ASS'_{Δ}-ben, így

$$FF' = \frac{SS'}{2} = \frac{CC'}{4} = \frac{BB'}{4} . \tag{1}$$

(1 pont)

Legyen $KK' \perp AO$, ahol $K' \in AO$. A KK' az ABB_{Δ} középvonala, ahonnan $KK' = \dfrac{BB'}{2}$, de EI a $BB'K'K$ trapéz középvonala, ahonnan

$$EI = \frac{BB' + KK'}{2} = \frac{BB' + \frac{BB'}{2}}{2} = \frac{3}{4}BB' . \tag{2}$$

Így az (1) és (2) összefüggések alapján $EE' = EI + FF' = BB'$. **(1 pont)**

Tehát

$$T_{EMNF} = \frac{(NF + ME) \cdot EE'}{2} = \frac{AO \cdot BB'}{2} = T_{AOB} = \frac{T_{ABC}}{2} ,$$

azaz

$$\frac{T_{EMNF}}{T_{ABC}} = \frac{1}{2} .$$

(1 pont)

■