VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
megyei szakasz, 2025. február 1.

VII. osztály

1. feladat. A hét törpe kártyajátékot játszik egy különleges 2025 kártyából álló paklival. A kártyákon egy 1 és 2025 közötti természetes szám szerepel a gyök alatt. Mindegyik kártyán pontosan egy szám van és egyetlen szám sem szerepel két kártyán. A megkevert pakliból a törpék egymás után húznak egy-egy kártyát, amíg a pakli el nem fogy.
Bizonyítsd, hogy amikor az összes kártyát kihúzták lesz legalább egy törpe, akinek a kártyáin egyetlen természetes szám négyzete sem szerepel!

2. feladat. Az $ABCD$ paralelogrammában $AD \equiv BD$, P a DC oldal egy olyan pontja, hogy $BP \perp DC$, továbbá $BP \cap AC = \{N\}$.

a) Bizonyítsd, hogy $NC \equiv ND$ és $AN = 2 \cdot ND$.

b) Bizonyítsd, hogy $\widehat{CAD} = 30°$ akkor és csakis akkor, ha $ABCD$ rombusz!

3. feladat. a) Határozd meg azon $x \geq 0$ racionális számokat, amelyekre $\dfrac{10x+1}{x+1}$ négyzetszám!

b) Oldd meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán:

$$\frac{x+1}{5} + \frac{x+2}{6} + \frac{x+3}{7} + \cdots + \frac{x+2024}{2028} = \frac{2024^2}{2023}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{2023 \cdot 2024}\right).$$

4. feladat. Az ABC háromszögben O a BC oldal felezőpontja, E és F pedig az AB és AC oldalaknak olyan belső pontjai, amelyekre $AE = 3 \cdot EB$ és $CF = 3 \cdot AF$. Az E és F pontokon keresztül az AO egyenessel húzott párhuzamosok a BC oldalt az M, illetve N pontokban metszik.
Bizonyítsd be, hogy:

a) $EMNF$ trapéz és $EM + FN = AO$;

b) $\dfrac{T_{EMNF}}{T_{ABC}} = \dfrac{1}{2}$.

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.