VII. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIV. EMMV
megyei szakasz, 2025. február 1.

V. osztály

1. feladat (10 pont). a) Igazold, hogy az $a = 2025 \cdot (2025 + 2024 \cdot 2025) : (2025 \cdot 2026 - 2025)$ négyzetszám!

b) Legyen n a legnagyobb, nullától különböző számjegyekből álló természetes szám, amelyben a számjegyek összege 2025. Határozd meg az n szám 37-tel való osztási maradékát és hányadosát!

Durugy Erika, Torda
Mátyás Ildikó Beáta, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a)

$$a = 2025 \cdot [2025 \cdot (1 + 2024)] : [2025 \cdot (2026 - 1)] \quad \textbf{(2 pont)}$$
$$= 2025 \cdot 2025^2 : 2025^2 \quad \textbf{(1 pont)}$$
$$= 2025 = 45^2. \quad \textbf{(1 pont)}$$

b) A legnagyobb természetes szám, melynek számjegyei nullától különböznek és összegük 2025, az $n = \underbrace{11...111}_{2025\text{-ször}}$ természetes szám. **(1 pont)**

Az n szám felírható, mint

$$n = \underbrace{111 \cdot 10^{2022} + 111 \cdot 10^{2019} + 111 \cdot 10^{2016} + ... + 111 \cdot 10^3 + 111}_{675 \text{ tag}}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Észrevesszük, hogy $111 = 37 \cdot 3$, így a keresett szám a következő alakokba írható:

$$n = \underbrace{111 \cdot 10^{2022} + 111 \cdot 10^{2019} + ... + 111 \cdot 10^3 + 111}_{675 \text{ tag}}$$
$$= 37 \cdot 3 \cdot \underbrace{(10^{2022} + 10^{2019} + ... + 10^3 + 1)}_{675 \text{ tag}} \quad \textbf{(1 pont)}$$
$$= 37 \cdot 3 \cdot \underbrace{1001001...1001}_{2023 \text{ számjegy}}$$
$$= 37 \cdot \underbrace{3003003...3003}_{2023 \text{ számjegy}}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Tehát a maradékos osztás tétele alapján belátható, hogy az n számnak 37-tel való osztásakor a hányados $\underbrace{3003003...3003}_{2023 \text{ számjegy}}$ lesz, a maradék pedig 0. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont). Az iskolában Marika felírja a táblára növekvő sorrendben az összes természetes számot, az 1-es számtól kezdve, egészen a 2025-ös számmal bezárólag. A szünetben megérkezik Pisti, és viccből letörli a tábláról a 89-től 113-ig terjedő számokat, beleértve a 89-et és a 113-at is. Miután Marika rászól, hogy hagyja abba, a többi szám érintetlenül a táblán marad. Ekkor Marika kíváncsian kérdezi a következőket.

a) A táblán maradt számoknak összesen hány számjegye van?

b) A táblán maradt számok sorában melyik számjegy található a 2025-dik helyen? Indokold meg a helyes választ!

Durugy Erika, Torda
Orban Ilona-Karmen, Berettyószéplak

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Megfigyelhetjük a következőket:

- 1-től 9-ig 9 darab egyjegyű szám van, ez összesen 9 számjegy. **(1 pont)**
- 10-től 99-ig 90 darab kétjegyű szám van, ez összesen 180 számjegy, de ebből hiányzik 11 darab kétjegyű szám, amit Pisti letörölt, vagyis 22 számjegy, tehát $180 - 22 = 158$ számjegy marad. **(1 pont)**
- 100-tól 999-ig 900 darab háromjegyű szám van, amiből hiányzik 14 darab, amit Pisti letörölt, tehát marad összesen $2700 - 42 = 2658$ számjegy. **(1 pont)**
- 1000-tól 2025-ig $2025-999 = 1026$ darab négyjegyű szám van, amelyeknek összen $1026 \cdot 4 = 4104$ darab számjegye van.

Tehát a táblán maradt számoknak összesen $9 + 158 + 2658 + 4104 = 6929$ számjegye van. **(1 pont)**

b) Mivel $9+158 < 2025$ és $9+158+2658 = 2825 > 2025$, ezért a háromjegyű számok valamelyikének a számjegye lesz a keresett 2025. számjegy. Tehát a háromjegyű számok számjegyei közül a $2025 - 167 = 1858$. számjegyet keressük. **(2 pont)**

Az 1858-at hárommal osztva a hányados 619, a maradék pedig 1. Ez azt jelenti, hogy a táblán maradt számok közül 619 darab háromjegyű szám után következő első számjegyet keressük. **(1 pont)**

Mivel 114-gyel kezdődően a 732-ig bezárólag összesen 619 darab háromjegyű szám van, így az utánuk következő első számjegy a 733 első számjegye, vagyis a 7-es. Tehát a táblán marad számok sorában a 2025. számjegy a 7-es. **(2 pont)**

$$\underbrace{1,\,2,\,\ldots,\,9,}_{9\text{ db. számjegy}}\ \underbrace{10,\,11,\,\ldots,\,87,\,88,}_{158\text{ db. számjegy}}\qquad\qquad \underbrace{114,\,115,\,\ldots,732,}_{1857\text{ db. számjegy}}\ \boxed{7}33,\ldots,\,2025.$$

■

3. feladat (10 pont). Józsi és Karcsi társasjátékot játszanak és a továbblépéshez maguk választottak feltételeket, egy piros és egy sárga dobókockával történő dobás alapján. Józsi akkor léphet, ha a két kockával dobott értékek összegének és szorzatának összege páros szám. Karcsi pedig akkor léphet, ha ez a szám páratlan. Két dobás eredményét azonosnak tekintjük, ha az azonos színű kockákon ugyanaz a szám jelenik meg a két dobás során. Hányféle különböző eredménye lehet a dobásoknak, ha a két kockával mindig egyszerre dobunk? Ebből hány esetben léphet Karcsi és hány esetben léphet Józsi? Indokold meg a választ!

Matlap 10/2024, A:5010

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
A két különböző színű kockával összesen $6 \cdot 6 = 36$ eredménye lehet a dobásoknak. **(3 pont)**
Ismeretes, hogy két szám összege akkor páros, ha mindkét szám ugyanolyan paritású.
Két szám szorzata csak akkor páratlan, ha mindkét szám páratlan.
Jelöljük a két dobókockán levő értékek összegét $ö$-vel, szorzatukat pedig sz-szel. Az $ö + sz$ összeget jelöljük e-vel.

- Ha mindkét dobókockán levő érték páratlan, akkor

$$ö - \text{páros és } sz - \text{páratlan, így } e - \text{páratlan.}$$

(1 pont)

- Ha a 2 dobókockán levő értékek közül egyik páros, a másik páratlan, akkor

$$ö - \text{páratlan és } sz - \text{páros, így } e - \text{páratlan.}$$

(1 pont)

- Ha mindkét dobókockán levő érték páros, akkor

$$ö - \text{páros és } sz - \text{páros, így } e - \text{páros.}$$

(1 pont)

Tehát az eredmény csak akkor páros, ha mindkét dobókockával páros számot dobunk. Azoknak a dobásoknak a száma, ahol mindkét érték páros, egyenlő 9-cel. Ezek:

$$2-2; 4-4; 6-6; 2-4; 4-2; 2-6; 6-2; 4-6; 6-4.$$

(2 pont)
Az eredmény 27 esetben páratlan, tehát Karcsi 27 esetben léphet, illetve 9 esetben páros, ekkor Józsi léphet.

(1 pont)

Megjegyzés. Ha a versenyző tanuló táblázat segítségével leírja az összes lehetséges dobást és eredményt, akkor is megszerzi a maximális pontszámot.

■

4. feladat (10 pont). a) Határozd meg a $3^{10} + 5^{10}$ szám utolsó számjegyét!

b) Milyen n pozitív természetes számokra lesz a 81^n utolsó két számjegye $\ldots 01$?

c) Határozd meg a $3^{2025} + 5^{2025}$ utolsó két számjegyét!

Szász Szilárd, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Ha megnézzük az 5 hatványainak utolsó számjegyét, azt látjuk, hogy

$$u(5^1) = 5, \quad u(5^2) = 5, \quad u(5^3) = 5, \quad \ldots, \quad u(5^{10}) = 5. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ahhoz, hogy az ismétlődő mintát felismerjük, megnézzük a 3 hatványainak az utolsó számjegyét:

$$u(3^1) = 3, \quad u(3^2) = 9, \quad u(3^3) = u(27) = 7, \quad u(3^4) = u(81) = 1, \quad u(3^5) = u(243) = 3, \ldots.$$

Ezek alapján azt látjuk, hogy a hatványok utolsó számjegyei rendre $3, 9, 7, 1$ és ezek ismétlődnek ebben a sorrendben. **(1 pont)**

Tehát, hogy megtudjuk, mi a 3^{10} utolsó számjegye, elég csak a 10-et 4-gyel osztani és az osztás maradékát figyelembe venni:

$$10 : 4 = 2, \text{ ahol a maradék } 2.$$

Mivel a maradék 2, ezért az $u(3^{10}) = u(3^2) = 9$.

Végezetül kapjuk, hogy $3^{10} + 5^{10} = \overline{\ldots 9} + \overline{\ldots 5} = \overline{\ldots 4}$, tehát $u(3^{10} + 5^{10}) = 4$. **(1 pont)**

b) A 81 hatványainak az utolsó számjegyét a következőképpen számolhatjuk ki. A $81^1 = 81$ utolsó két számjegye 81. A $81^2 = 81 \cdot 81 = 6561$ utolsó két számjegye 61. A $81^3 = 81^2 \cdot 81$ utolsó két számjegyének kiszámolásához vesszük a 81^2 utolsó két számjegyét (a 61-et), amelyet megszorzunk 81-gyel ($61 \cdot 81 = 4941$), majd vesszük a kapott eredmény utolsó két számjegyét, a 41-et. Hasonlóan a fentihez a $81^4 = 81^3 \cdot 81$ utolsó két számjegye megegyezik a 41 és 81 szorzatának ($41 \cdot 81 = 3321$) utolsó két számjegyével, vagyis 21-gyel. A $81^5 = 81^4 \cdot 81$ utolsó két számjegye megegyezik a 21 és 81 szorzatának ($21 \cdot 81 = 1701$) utolsó két számjegyével, a 01-gyel. Összefoglalva

$$\begin{aligned}
81^1 &= 81 = \overline{\ldots 81},\\
81^2 &= 81^1 \cdot 81 = \overline{\ldots 81} \cdot 81 = \overline{\ldots 61},\\
81^3 &= 81^2 \cdot 81 = \overline{\ldots 61} \cdot 81 = \overline{\ldots 41},\\
81^4 &= 81^3 \cdot 81 = \overline{\ldots 41} \cdot 81 = \overline{\ldots 21},\\
81^5 &= 81^4 \cdot 81 = \overline{\ldots 21} \cdot 81 = \overline{\ldots 01}.
\end{aligned} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ezután az utolsó két számjegy ismétlődik:

$$\begin{aligned}
81^6 &= 81^5 \cdot 81 = \overline{\ldots 01} \cdot 81 = \overline{\ldots 81},\\
81^7 &= 81^6 \cdot 81 = \overline{\ldots 81} \cdot 81 = \overline{\ldots 61},\\
81^8 &= 81^7 \cdot 81 = \overline{\ldots 61} \cdot 81 = \overline{\ldots 41},\\
81^9 &= 81^8 \cdot 81 = \overline{\ldots 41} \cdot 81 = \overline{\ldots 21},\\
81^{10} &= 81^9 \cdot 81 = \overline{\ldots 21} \cdot 81 = \overline{\ldots 01}.
\end{aligned}$$

Tehát a 81 azon pozitív hatványainak lesz az utolsó két számjegye 01, amelyek 5-nek többszörösei: $81^n = \overline{\ldots 01}$, csak ha n osztható 5-tel. **(2 pont)**

c) Mivel $81^5 = (3^4)^5 = 3^{20}$ és $2025 = 2020 + 5 = 101 \cdot 20 + 5$, ezért

$$3^{2020} = 3^{20 \cdot 101} = (3^{20})^{101} = (\overline{...01})^{101} = \overline{...01}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Így $3^{2025} = 3^{2020} \cdot 3^5 = \overline{...01} \cdot 243 = \overline{...43}$. **(1 pont)**

Végezetül kapjuk, hogy $3^{2025} + 5^{2025} = \overline{...43} + \overline{...25} = \overline{...68}$. **(1 pont)**

■